Université Bordeaux I

Mars 1998

ECOLE MATMECA

Analyse des Equations aux Dérivées Partielles

Michaël BAUDIN

FIG. 0.1 - *Prolongement de Babitch*

Table des matières

Avertissement

Comme le précédent document de Distributions, ce pseudo-cours n'est qu'un outil rassemblant la totalité des théorèmes, définitions, lemmes et autres propositions du cours d' "Analyse des Equations aux Dérivées Partielles" tel qu'il a été enseigné par M. Joly pendant le printemps (frais mais ensoleillé) 1998.

Après avoir lu ces quelques pages, les noms de "Dirichlet", de "Neumann" et de "Babitch" vous seront devenus familier et vous vous demanderez probablement pourquoi la "Maîtrise d'Ingéniérie Mathématiques" ne porte pas plutôt le nom de "Maîtrise des Equations aux Dérivées Partielles" tant il est vrai que l'année de Maîtrise est orientée vers cette question.

Sachez enfin que, étant moi aussi un humain, j'ai pu (ou plutôt devrai-je dire dû) faire, dans ces pages des erreurs (qu'on peut supposer involontaires).

Il ne tient qu'à toi, cher lecteur, de me les signaler.

Michaël Baudin
baudin@emi.u-bordeaux.fr

Chapitre 1

Espaces $H^s(\Omega)$

Soit Ω*ouvert* $\subset \mathbb{R}^N$ et $s \in \mathbb{R}$

1.1 Espaces de Sobolev

Définition : *Espaces $H^s(\Omega)$*
$u \in H^s(\Omega)$ **ssi** $\exists\, \mathcal{U} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *tq* $\mathcal{U}/\Omega = u$

Définition : *Espaces $\mathcal{H}^m(\Omega)$*
Soit $m \in \mathbb{N}$ **Alors**

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \ \ tq \ \ \forall\, \alpha \ \ tq \ \ |\alpha| \leq m, \ \ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\} \tag{1.1}$$

Proposition :
1/ $H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme: $\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\limits_{\mathcal{U}/\Omega = u} \|\mathcal{U}\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$
2/ $\mathcal{H}^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme: $\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}$
3/ **Soit** $\mathcal{Z}(\Omega) = \left\{V \in H^s\left(\mathbb{R}^N\right) \ \ tq \ \ V/\Omega = 0\right\}$
Alors $H^s\left(\mathbb{R}^N\right) = \mathcal{Z}(\Omega) \oplus \mathcal{Z}^\perp(\Omega)$
De plus $H^s(\Omega)$ est isométrique à $\mathcal{Z}^\perp(\Omega)$

Proposition : *Inclusions*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \ \ H^m(\Omega) \subsetneq \ \ \mathcal{H}^m(\Omega) \tag{1.2}$$

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \ \ tq \ \ \ H^m(\Omega) \neq \mathcal{H}^m(\Omega) \tag{1.3}$$

$$\forall\, s, t \in \mathbb{R} \ \ tq \ \ s \geq t, \ \ H^s(\Omega) \subset H^t(\Omega) \tag{1.4}$$

$$s > \frac{d}{2} + k \implies H^s(\Omega) \subset C^k_b(\bar{\Omega}) \tag{1.5}$$

NOTATION :

$$\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{\varphi/\Omega \;\; tq \;\; \varphi \in \mathcal{D}(I\!R^N)\right\} \tag{1.6}$$

$$\forall\, k \in I\!N,\;\; C_b^k\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{\varphi/\Omega \;\; tq \;\; \varphi \in C_b^k(I\!R^N)\right\} \tag{1.7}$$

PROPOSITION :
1/ $\forall\, s \in I\!R$, $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^s(\Omega)$
2/ **Soit** $s > t$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ **Alors** l'application $\begin{array}{ccc} H^s(\Omega) & \longrightarrow & H^t(\Omega) \\ u & \longrightarrow & \varphi u \end{array}$ est compacte.
3/ **Soit** $s > t$. **Si** Ω est borné, l'injection canonique : $H^s(\Omega) \hookrightarrow H^t(\Omega)$ est compacte.

1.2 m-Prolongement

DÉFINITION : *m-prolongement*
Soit $m \in I\!N$
On dit que Ω a la propriété de m-prolongement **ssi**
$\exists\, P : \mathcal{H}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^m(I\!R^N) = H^m(I\!R^N)$ linéaire, continue et tel que $Pu/\Omega = u$

PROPOSITION :
Soit $m \in I\!N$ et Ω tel que Ω a la propriété de m-prolongement
Alors $\mathcal{H}^m(\Omega) = H^m(\Omega)$

NOTATION :

$$I\!R^N_+ = \left\{(x', x_d) \in I\!R^N \;\;\; tq \;\; x_d > 0\right\} \tag{1.8}$$

PROPOSITION :
$I\!R^N_+$ possède la propriété de 1-prolongement.

LEMME :
$\mathcal{D}\left(\overline{I\!R^N_+}\right)$ est dense dans $\mathcal{H}(I\!R^N_+)$

LEMME : *Prolongement de Babitch de fonctions régulières*
Soit $u \in \mathcal{D}\left(\overline{I\!R^N_+}\right)$ On pose

$$(Pu)(x', x_N) = \left\{ \begin{array}{l} u(x', x_N) \;\; si \;\; x_N > 0 \\ u(x', -x_N) \;\; si \;\; x_N < 0 \\ u(x', 0) \;\; si \;\; x_N = 0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Alors $\|Pu\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)}$

DÉFINITION : *Ouvert régulier*

On dit que Ω est régulier **ssi** $\forall\, x_0 \in \partial\Omega$,

1/ $\exists\, \mathcal{O} ouvert \subset \mathbb{R}^N \;\; tq \;\; x_0 \in \mathcal{O}$

2/ $\mathcal{O}' ouvert \subset \mathbb{R}^N \;\; tq \;\; 0 \in \mathcal{O}'$

3/ $\theta \in C_b^1\,(\mathcal{O};\mathcal{O}')$ un difféomorphisme tq
- i)$\theta(x_0) = 0$
- ii)$\theta(\Omega \bigcap \mathcal{O}) = \mathbb{R}^N_+ \bigcap \mathcal{O}'$
- iii)$\theta\,(\partial\Omega \bigcap \mathcal{O}) = \partial\mathbb{R}^N_+ \bigcap \mathcal{O}'$

COROLLAIRE :

Tout ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ possède la propriété de 1-prolongement.

LEMME :

Soit $v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\theta \in C_b^1\left(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N\right)$ difféomorphisme et $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R}^N, u(x) = v(\theta(x))$ **Alors** $\exists\, c > 0 \;\; tq$

$$\frac{1}{c}\|v\|_{H^1\left(\mathbb{R}^N\right)} \leq \|u\|_{H^1\left(\mathbb{R}^N\right)} \leq c\|v\|_{H^1\left(\mathbb{R}^N\right)} \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Espaces $H_0^m(\Omega)$

2.1 Traces

NOTATION :
$\forall\, x \in I\!R^N$ **Alors** $x' = (x_1, ..., x_{N-1})$

PROPOSITION :
Soient $s \in I\!R$, $j \in I\!N$ tq $s - j - \frac{1}{2} > 0$ **Alors** $\exists\, c > 0$ tq $\forall\, u \in H^s\left(I\!R^N\right)$,

$$\sup_{x_N \in I\!R^N} \|\partial^j_{x_N} u(., x_N)\|_{H^{s-j-1/2}\left(I\!R^{N-1}_{x'}\right)} \leq c\|u\|_{H^s\left(I\!R^N\right)} \tag{2.1}$$

COROLLAIRE :
Soit $u \in H(?)$ **Alors** $\partial^j_{x_N} u \in \bigcap_{s-j-1/2>0} C^j_b\left(x_N; H^{s-j-1/2}(x')\right)$

COROLLAIRE :
L'application : $\begin{array}{ccc} H^s(?) & \longrightarrow & C^0_b\left(x_N; H^{s-j-1/2}(x')\right) \\ u & \longrightarrow & \partial^j_{x_N} u(x_N) \end{array}$ est linéaire, continue et se prolonge de façon unique à tout $H^s(?)$

NOTATION :
Soit K le plus grand entier tq $K < s - 1/2$
Si $j \leq K$, $\gamma_j u = \partial^j_{x_N} u(x', 0)$ et $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_K)$

PROPOSITION :
L'application :

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & H^s\left(I\!R^N\right) & \longrightarrow & H^{s-1/2}(I\!R^N) \times H^{s-3/2}(I\!R^N) \times ... \times H^{s-K-1/2}(I\!R^N) \\ & u & \longrightarrow & \gamma u \end{array}$$

est linéaire, continue et surjective.

THÉORÈME :
Soit $\Omega ouvert \subset I\!R^N$ régulier et orientable.
Alors , on peut définir

$$\gamma \;:\; H^s(\Omega) \longrightarrow \prod_{0 \leq j \leq N} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega) \tag{2.2}$$

telle que, si u est régulière, $\Gamma_j u = \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u/\partial\Omega$ où $\nu : \partial\Omega \longrightarrow S^{N-1}$ est la normale unitaire sortante de $\partial\Omega$

THÉORÈME : <u>*de Nicolas*</u>
Soit $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tel que Ω vérifie la propriété de m-prolongement ou bien Ω borné régulier. On note $\vec{\nu}$ la normale unitaire sortante de Ω
On note :

$$\gamma_0(\varphi) = \varphi_{/\partial\Omega} \tag{2.3}$$

$$\gamma_1(\varphi) = \vec{\nabla}\varphi.\vec{\nu} \tag{2.4}$$

$$\forall\, \ell \geq 2, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right), \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \;\; \gamma_\ell\left(\varphi\right)(x) = \frac{\partial^\ell \varphi}{\partial \nu^\ell}(x) \tag{2.5}$$

Si $0 \leq \ell \leq m-1$ **Alors** γ_ℓ se prolonge en une application linéaire continue surjective telle que

$$\gamma_\ell \quad : \quad H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m-\ell-1/2}(\partial\Omega) \tag{2.6}$$

DÉFINITION : <u>$H_0^m(\Omega)$</u>
Soient $m \geq 1$ et $\Omega ouvert \subset \mathbb{R}^N$ régulier, orientable.

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)} \tag{2.7}$$

THÉORÈME :
Soient $m \geq 1$, $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_{m-1})$

$$A = \{u \in H^m(\Omega) \;\; tq \;\; \gamma u = 0\} \tag{2.8}$$

$$\forall\, u \in H^m(\Omega), \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) \;\; si \;\; x \in \overline{\Omega}, \\ 0 \;\; sinon \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \;\; tq \;\; \tilde{u} \in H^m(\Omega)\} \tag{2.10}$$

Alors

$$H_0^m(\Omega) = A = \tilde{H}^1(\Omega) \tag{2.11}$$

2.2 Théorème de Poincaré

DÉFINITION : <u>*Ouvert borné dans une direction*</u>
Soit $\Omega ouvert \subset \mathbb{R}^N$
On dit que Ω est borné dans une direction **ssi** $\exists\, a \in \mathbb{R} \;\; tq \;\; \Omega \subset]-a, a[\times \mathbb{R}^{N-1}$, à une

rotation près.

NOTATION : <u>*Norme, Semi-norme sur $H^m(\Omega)$*</u>

$\forall\, u \in H^m(\Omega), \|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$ $\forall\, u \in H^m(\Omega), |u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|= m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$

PROPOSITION : <u>*Inégalité de Poincaré*</u>
Soit $\Omega ouvert \subset I\!R^N$, borné dans une direction et $m \in I\!N$.
Alors , sur $H_0^m(\Omega)$, la norme $\|.\|_{m,\Omega}$ est équivalente à la norme $|.|_{m,\Omega}$

REMARQUE :
La proposition précédente s'écrit souvent :

$$\exists\, c(m,\Omega) > 0 \;\; tq \;\; \forall\, u \in H_0^m(\Omega)\,, \;\; \|u\|_{m,\Omega} \leq c(m,\Omega)|u|_{m,\Omega} \tag{2.12}$$

REMARQUE :
$(H_0^m(\Omega))^{'}$ peut se représenter comme un sous-espace de $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ car :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq H_0^m(\Omega) \Longrightarrow (H_0^m(\Omega))^{'} \subsetneq \mathcal{D}^{'}(\Omega) \tag{2.13}$$

NOTATION :
Soit $\Omega ouvert \subset I\!R^N$, régulier.

$$H^{-m}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}^{'}(\Omega) \;\; tq \;\; \exists\, g_\alpha \in L^2(\Omega) \;\; tq \;\; u = \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha g_\alpha \right\} \tag{2.14}$$

PROPOSITION :
Soit $\Omega ouvert \subset I\!R^N$, régulier. **Alors** $(H_0^m(\Omega))^{'} = H^{-m}(\Omega)$

Chapitre 3

Problème de Dirichlet pour le Laplacien

PROPOSITION : *Problème aux limites, formulation variationnelle, problème de minimisation*
Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ où Ω régulier, borné dans une direction.
Alors le problème aux limites :

$$\textit{trouver} \;\; u \in H_0^1(\Omega) \;\; tq \;\; -\Delta u = f \;\; \textit{dans} \;\; H^{-1}(\Omega) \tag{3.1}$$

est équivalent à la formulation variationnelle :

$$\textit{trouver} \;\; u \in H_0^1(\Omega) \;\; tq \;\; \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,, \;\; \int_\Omega \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v \;\, dx = f(v) \tag{3.2}$$

équivaut au problème de minimisation :

$$\textit{trouver} \;\; u \in H_0^1(\Omega) \;\; tq \;\; \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,, \;\; \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 \;\, dx - f(u) \leq \mathcal{E}(v) \tag{3.3}$$

PROPOSITION :
Le problème 3.1 possède une seule solution.

PROPOSITION : *Problème de Dirichlet inhomogène*
Soit $\Omega ouvert \subset I\!\!R^N$, régulier, borné dans une direction, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Omega)$.
Alors $\exists!\; u \in H^1(\Omega) \;\; tq$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \\ \gamma_0 u & = & g \end{array} \right. \tag{3.4}$$

PROPOSITION :
Soit $\Omega ouvert \subset I\!\!R^N$, régulier, borné dans une direction, $s \geq -1$ et $f \in H^s(\Omega)$.
Alors la solution du problème de Dirichlet :

$$\textit{trouver} \;\; u \in H_0^1(\Omega) \;\; tq \;\; -\Delta u = f \tag{3.5}$$

vérifie :

$$u \in H^{s+2}(\Omega) \tag{3.6}$$

LEMME :
Soit $u \in H^1(\Omega^+)$ tq $-\Delta u \in L^2(\Omega^+)$
Alors $\exists\ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}\left(\overline{\Omega^+}\right)$ tq :

$$u_h \longrightarrow u \ \ dans \ \ H^1\left(\Omega^+\right) \tag{3.7}$$

$$\Delta u_k \longrightarrow \Delta u \ \ dans \ \ L^2\left(\Omega^+\right) \tag{3.8}$$

NOTATION : <u>*Prolongement*</u>
Soit $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega^+})$. On note P l'application définie par:

$$Pv(x', x_N) = \begin{cases} v(x', x_N) & si \ \ x_N > 0 \\ -v(x', -x_N) & si \ \ x_N < 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

LEMME :
Soit $v \in \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$
Alors

$$< \Delta Pv, \varphi >_{\mathbb{R}^N} = < P\Delta v, \varphi >_{\mathbb{R}^N} + 2\int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x', 0)\, \partial_N \varphi(x', 0)\, dx' \tag{3.10}$$

Chapitre 4

Opérateurs elliptiques du 2è ordre

4.1 Exemple de forme bilinéaire symétrique

Soit $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice telle que

$$\forall\, 1 \leq i,j \leq N,\ \ a_{ij} \in L^\infty(\Omega)\ \ et\ \ \exists\, \delta > 0\ \ tq\ \ \forall\, \xi \in I\!R^N,\ \ \sum_{1\leq i,j\leq N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta|\xi|^2$$

Soit $b \in L^\infty(\Omega)$
Soit $u, v \in H^1(\Omega)$. On définit la forme bilinéaire a par :

$$a(u,v) = \sum_{1\leq i,j\leq N} \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)\ \ dx + \int_\Omega b(x)u(x)v(x)\ \ dx$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. On suppose que $\forall\, v \in H^1(\Omega),\ f(v) = \displaystyle\int_\Omega fv\ \ dx$

On considère le problème variationnel suivant :

$$trouver\ \ u \in H^1(\Omega)\ \ tq\ \ \forall\, v \in H^1(\Omega),\ \ a(u,v) = f(v) \tag{4.1}$$

DÉFINITION : _Forme bilinéaire coercive_
a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ **ssi** $\exists\, \alpha > 0\ \ tq\ \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),\ a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$

LEMME :
1/ a est bornée sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$
2/ **Si** $pp\ \ x \in \Omega,\ \ b(x) \geq 0$ et **Si** Ω est borné dans une direction **Alors** a est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ et $\forall\, u \in H_0^1(\Omega),\ a(u,u) \geq \delta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$
3/ **Si** $\exists\, \alpha > 0\ \ tq\ \ \underset{\Omega}{inf\, ess\, b} \geq \alpha$ **Alors** a est coercive sur $H^1(\Omega)$ et $\forall\, u \in H^1(\Omega)$, $a(u,u) \geq inf\,(\delta, \text{inf ess } b)\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$

NOTATION :
Soit V et V' définis par :
1/ $V = H_0^1(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ ou bien par
2/ $V = H^1(\Omega)$, $V' = \left(H^1(\Omega)\right)'$, $H = L^2(\Omega)$

NOTATION :
On note $\vec{\nu}$ la normale unitaire extérieure à Ω et

$$\frac{\partial u}{\partial_{\nu_A}} = \sum_{1\leq i,j\leq N} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\nu_j$$

PROPOSITION :
Soit a bilinéaire, bornée, coercive sur $V \times V$.
1/ **Soit** $f \in V'$. **Alors** $\exists\, !u \in V \;\; tq \;\; \forall\, v \in V,\, a(u,v) = f(v)$
2/ On prend $V = H_0^1(\Omega)$ **Soit** $L = -\sum_{1\leq i,j\leq N} \partial_j \left(a_{ij}(x)\partial_i\right) + b(x)$
Alors u vérifie le problème 4.1 **ssi**

$$\left\{\begin{array}{rcl} Lu & = & f \\ u/\partial\Omega & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Si $a_{ij} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ **Alors** $\partial_j\left(a_{ij}(x)\partial_i u(x)\right) = a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u(x) + \left(\partial_j a_{ij}(x)\right)\partial_i u(x)$
3/ **Si** $V = H^1(\Omega)$, $a_{ij} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $f \in L^2(\Omega)$ **Alors** u vérifie le problème 4.1 **ssi**

$$\left\{\begin{array}{rcl} Lu & = & f \\ \partial_{\vec{\nu}_A} u/\partial\Omega & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.3}$$

4/ **Si** $f \in L^2(\Omega)$ **Alors** la solution du problème de Dirichlet est un élément de $H^2(\Omega)$ (idem pour la solution du problème de Neumann).

4.2 Méthode spectrale

Soit H un espace de Hilbert séparable, V un espace de Hilbert et V' l'espace des formes linéaires sur V. On suppose que

$$V \underset{dense}{\overset{\subsetneq}{}} H \underset{dense}{\overset{\subsetneq}{}} V' \tag{4.4}$$

Soit $f \in V'$ et a une forme bilinéaire symétrique sur $V \times V$.
On suppose que a est continue: $\exists\, M > 0 \;\; tq \;\; \forall\, u,v \in V,\, |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$.
On suppose que a est coercive: $\exists\, \delta > 0 \;\; tq \;\; \forall\, u \in V,\, a(u,u) \geq \delta\|u\|_V^2$.
Alors $\exists$ un isomorphisme $A \in \mathcal{L}(V,V') \;\; tq \;\; \forall\, u,v \in V,\, a(u,v) =< Au, v >_{V',V}$.
NOTATION :
$\forall\, u \in V,\, \|u\|_a = \sqrt{|a(u,u)|}$
$\forall\, g \in V',\, \|g\|_{a^\star} = \sup_{\|u\|_a \geq 1} |g(u)|$

LEMME :
1/ $\|.\|_a$ est une norme sur V.
2/ A est une isométrie bijective d'espace de Hilbert [1]

NOTATION :
Soit $D(A) = \{u \in V \;\; tq \;\; Au \in H\}$ et $\forall\, k \in I\!N,\, D\left(A^k\right) = \left\{u \in V \;\; tq \;\; A^k u \in H\right\}$
Soit $G = A^{-1}$ **Alors** $G : V' \longrightarrow V$ est une isométrie bijective.

1. $\forall\, u \in V,\, \|Au\|_{a^\star} = \|u\|_a$

LEMME :
On muni $D(A)$ de la norme de graphe: $\forall\, u \in V$, $\|u\|_{D(A)} = \|u\|_V + \|Au\|_H$.
Alors $G : H \longrightarrow D(A)$ est un isomorphisme.

LEMME :
1/ $G \in \mathcal{L}(H)$
2/ G est autoadjoint
3/ G est positif
4/ si $V \subsetneq H$ est compacte et Ω borné **Alors** G est compact

PROPOSITION :
$\exists\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ une base hilbertienne et il existe une suite croissante et positive: $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $G(\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n$

THÉORÈME :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. On suppose que: $V \subsetneq H$ est compacte.
1/ il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne orthonormée de H
1'/ $u \in H \iff \sum\limits_{n\geq 0} |\,(\varphi_n, u)_H\,|^2 < \infty$ et alors $u = \sum\limits_{n\geq 0} (\varphi_n, u)_H\, \varphi_n$
2/ il existe $\left(\frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne orthonormée de V
2'/ $u \in V \iff \sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n |\,(\varphi_n, u)_H\,|^2 < \infty$ et alors $u = \sum\limits_{n\geq 0} (\varphi_n, u)_H\, \varphi_n$
3/ il existe $\left(\sqrt{\lambda_n}\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne orthonormée de V
3'/ $f \in V' \iff \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{\lambda_n} |\,(\varphi_n, f)_{V,V'}\,|^2 < \infty$ et alors $f = \sum\limits_{n\geq 0} (\varphi_n, f)_{V,V'}\, \varphi_n$

COROLLAIRE :
Soit $k \in \mathbb{N}$
Alors $u \in D(A^k) \iff \sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n^{2k} \left|(u, \varphi_n)\right|_H^2 < \infty$

THÉORÈME :
Soit $u_0 \in V$ **Alors** $\exists\, u \in C^0\left(\mathbb{R}_t^+; V\right) \bigcap C^1\left(\mathbb{R}_t^+; H\right)$ qui vérifie:

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

DÉFINITION :
Soit W un espace de Hilbert et $u : \mathbb{R} \longrightarrow W$
Alors $u \in C^0(\mathbb{R}; W)$ **ssi** $\lim\limits_{\delta t\longrightarrow 0} \|u(t+\delta t) - u(t)\|_W = 0$
$u \in C^1(\mathbb{R}; W)$ **ssi** $\exists\, u' \in C^0(\mathbb{R}; W)$ *tq* $\lim\limits_{\delta t\longrightarrow 0} \left\| \dfrac{u(t+\delta t) - u(t)}{\delta t} - u'(t) \right\|_W = 0$

LEMME :
$W = L^2(\mathbb{N}, \mu)$ [2]

---

2. $u \in W \iff u = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^2 \mu_n < \infty$

1/ **Si** $\forall n \in I\!N$, $\alpha_n \in C^\infty(I\!R_t)$ [3] **Alors** $u \in C^0(I\!R; W)$
2/ **Si** $\forall n \in I\!N$, $\alpha_n \in C^1(I\!R_t)$ [4] **Alors** $u \in C^1(I\!R; W)$

COROLLAIRE :
$u_0 \in D\left(A^k\right) \implies u \in C^0\left(D\left(A^k\right)\right) \bigcap C^1\left(D\left(A^{k-1}\right)\right) \bigcap C^k(H)$

THÉORÈME :
Soit $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ **Alors** $\exists!\ u \in C^0(I\!R_t; V) \bigcap C^1\left(I\!R_t; H \bigcap C^2(I\!R_t; V')\right)$ solution de :
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - Au = 0 \\ u(0) = u_0 \\ \partial_t u(0) = u_1 \end{cases}$$
De plus, $u(t) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\cos\left(t\sqrt{\lambda_n}\right) \alpha_n^0 + \frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_n}\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \alpha_n^1 \right) \varphi_n$

4.3 Calcul du Laplacien en coordonnées sphériques

4.3.1 Calcul

On considère le changement de variables suivant: $\forall\, \theta \in]0, 2\pi[$, $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $r \in]0, +\infty[$,
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

Soit $F : (r, \theta, \varphi) \longrightarrow (x, y, z)$

PROPOSITION :
Le système de coordonnées (r, θ, φ) est un système orthogonal mais pas orthonormé.
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\cos^2\varphi d\theta^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{4.6}$$

NOTATION :
$$(d\sigma)^2 = (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2 + (dx \wedge dz)^2 \tag{4.7}$$

COROLLAIRE :
La trace de $d\sigma$ sur S^2 est ce qu'on trouve dans $\iiint r^2 \cos\varphi dr d\theta d\varphi$ dans l'intégrale par rapport à θ et φ uniquement [5].
$$d\sigma/_{S^2} = |\cos\varphi|\, |d\theta \wedge d\varphi| /_{f^{-1}(S^2)} \tag{4.8}$$

3. $\exists\ (\beta_n)_{n \in I\!N} \in L^2(I\!N, \mu)$ *tq* $\forall\, t \in I\!R$, $|\alpha_n(t)| \leq \beta_n$
4. $\exists\ (\gamma_n)_{n \in I\!N} \in L^2(I\!N, \mu)$ *tq* $\forall\, t \in I\!R$, $|\alpha_n'(t)| \leq \gamma_n$
5. C'est probablement l'énoncé le plus clair du monde.

THÉORÈME : *Laplacien en coordonnées sphériques*

indexsphérique

$$F^\star(\Delta u) = \frac{1}{r^2\cos\varphi}\left[\partial_r\left(r^2\cos\varphi\partial_r(u\circ F)\right) + \partial_\theta\left(\frac{1}{\cos\varphi}\partial_\theta(u\circ F)\right) + \partial_\varphi\left(\cos\varphi\partial_\varphi(u\circ F)\right)\right]$$

DÉFINITION : *Moyenne de u sur les sphères*
Soit $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. On appelle moyenne de u sur les sphères: $\forall\, p \in \mathbb{R}^N \;\; tq \;\; p = r\omega$,

$$u^\sharp(p) = \frac{1}{|S^{N-1}|}\int_{S^{N-1}} u(r\omega)d\sigma_{N-1}(\omega) \tag{4.9}$$

PROPOSITION :
Soit $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. **Alors** $(\Delta u)^\sharp = \Delta\left(u^\sharp\right)$

DÉFINITION : *Fonction radiale*
Soit $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. On dit que u est radiale **ssi**

$$\exists\, f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^+\right) \;\; tq \;\; \forall\, p \in \mathbb{R}^N, u(p) = f(|p|) \tag{4.10}$$

LEMME :
Soit $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, radiale. **Alors** $\Delta u = \left(\partial_r^2 + \frac{N-1}{r}\partial_r\right)(u) = \frac{1}{r^{N-1}}\partial_r\left(r^{N-1}\partial_r\right)$

LEMME :
Soit $u \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right) \;\; tq \;\; \forall\, i, \partial_i u \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et u radiale.
Alors $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$< u, \varphi >= |S^{N-1}|\int_{r\geq 0} f(r)\varphi^\sharp(r)r^{N-1}dr$$

et

$$< u, \Delta\varphi >= -|S^{N-1}|\int_{r\geq 0} f'(r)\varphi^{\sharp(r)'}r^{N-1}dr \tag{4.11}$$

LEMME :
Soit $u \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right) \;\; tq \;\; u/_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\right)$ et u radiale.
Si $\Delta u/_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} = 0$ **Alors** $\exists\, c, c' \in \mathbb{R} \;\; tq \;\; f_N(r) = \begin{cases} c\ln r + c' \;\; si \;\; N = 2 \\ \frac{c}{N-2}\frac{1}{r^{N-2}} + c' \;\; si \;\; N > 2 \end{cases}$

LEMME :
L'application $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\right) \longrightarrow \mathcal{D}(]0,+\infty[)$ est surjective.

THÉORÈME : <u>*Solutions élémentaires radiales du Laplacien*</u>
Les solutions élémentaires radiales et $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$ sont:

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \ln r + c' \tag{4.12}$$

et

$$E_N = \frac{1}{|S^{N-1}|(N-2)} \frac{1}{r^{N-2}}, \quad avec \;\; N > 2 \tag{4.13}$$

4.3.2 Existence d'une fonction de Green pour le Laplacien (inhomogène)

On considère le problème:

$$\begin{cases} \Delta u = f \;\; dans \;\; \Omega \\ u = g \;\; dans \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{4.14}$$

NOTATION :
$\forall\, N > 1, \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N \,, \; K_N(x, y) = E_N(x - y)$

THÉORÈME :
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné et régulier. **Soit** $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ **Alors** $\forall\, x \in \Omega$,

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y) \;\; \Delta u(y) \;\; dy \;\; + \;\; \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial n(y)}(x,y) \;\; u(y) \;\; d\sigma(y) \;\; - \;\; \int_{\partial\Omega} K(x,y) \;\; \frac{\partial u}{\partial n(y)}(y) \;\; d\sigma(y) \tag{4.15}$$

NOTATION :
On note H_x la solution du problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_y H_x(y) = 0 \quad \forall\, y \in \Omega \\ H_x(y) = -K(x,y) \quad \forall\, y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

Ce problème a une seule solution $H_x \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

NOTATION : <u>*Fonction de Green*</u>
On définit la fonction de Green avec condition de Dirichlet:

$$\forall\, x, y \in \Omega, \;\; G_D(x,y) = K(x,y) + H_x(y) \tag{4.17}$$

Alors $\Delta_y G_D = \Delta_y K$ et $G_D(x,.)_{/\partial\Omega} = 0$

THÉORÈME :
Si $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ **Alors** $\forall\, x \in \Omega$,

$$u(x) = \int_\Omega G_D(x,y) \;\; \Delta_y u(y) \;\; dy \;\; + \;\; \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D}{\partial n(y)}(x,y) \;\; u(y) \;\; d\sigma(y) \tag{4.18}$$

THÉORÈME :
Soit Ω un ouvert borné régulier de $I\!R^N$ et $k \in I\!N$. **Alors**

$$(\Delta, \gamma_0) \quad : \quad H^{k+2}(\Omega) \longrightarrow \Big(H^k(\Omega), H^{k+3/2}(\partial\Omega)\Big)$$

est un isomorphisme.

THÉORÈME :
Soit Ω un ouvert borné régulier de $I\!R^N$ et $k \in I\!N$. **Alors**

$$(I - \Delta, \gamma_1) \quad : \quad H^{k+2}(\Omega) \longrightarrow \Big(H^k(\Omega), H^{k+1/2}(\partial\Omega)\Big)$$

est un isomorphisme.

4.3.3 Formulation intégrale sur le bord de l'ouvert

PROPOSITION :
Soit $N = 2$ ou 3. **Soit** Ω un ouvert de $I\!R^N$, borné, régulier et connexe. **Soit** a une forme bilinéaire, bornée, coercive et symétrique sur $H_0^1(\Omega)$. **Soit** $\dot{a}$ une forme bilinéaire sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$ définie par:
$\forall\ \dot{g}, \dot{h} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, on désigne par $g \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $h \in H_0^1(\Omega)$) l'unique solution du problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(g, \varphi) = 0, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \gamma_0 g = \dot{g} \ \ dans \ \ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.19}$$

et

$$\dot{a}(\dot{g}\dot{h}) = a(g, h) \tag{4.20}$$

Alors
1/ $\dot{a}$ est bornée, symétrique, coercive ou semi-coercive.
2/ Par dualité, on associe à a (resp. $\dot{a}$) l'opérateur A (resp. $\dot{A}$). **Si** $\dot{g}$ est régulière, **Alors**

$$\dot{A}\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial n_A} \tag{4.21}$$

Chapitre 5

Systèmes hyperboliques du 1^{er} ordre

5.1 Equations scalaires en 1D

5.1.1 Quelques considérations sur $\partial_t + \partial_x$

On considère le problème de Cauchy :

$$\textit{trouver } u \textit{ tq } \begin{cases} u_t + u_x = 0 & \forall\, t, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.1}$$

Proposition :
Si $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x)$ **Alors** le problème de Cauchy 5.1 possède une seule solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}_t; \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x))$ et

$$\forall\, t, x \in \mathbb{R},\ \ u(t,x) = u_0(t - x) \tag{5.2}$$

5.1.2 Equations scalaires à coefficients variables

Définition : <u>*Courbe caractéristique*</u>
On appelle courbe caractéristique de $\partial_t + c(t,x)\partial_x$ passant par (t_0, x_0) la solution maximale X de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(s; t_0, x_0) = c\Big(s, X\,(s; t_0, x_0)\Big) \\ X(t_0; t_0, x_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Définition : <u>*Ouvert de détermination*</u>
Soit $\Omega ouvert \subset \mathbb{R}^2$. On dit que Ω est un ouvert de détermination pour des données à $t = 0$ **ssi** $\forall\, (t_0, x_0) \in \Omega$, le segment de caractéristique $\Big\{\Big(s, X(s; (t_0, x_0))\Big)\ \ tq\ \ s \in [0, t_0]\Big\}$ est entièrement contenu dans Ω.

Définition :
Soit $\Omega ouvert \subset \mathbb{R}^2$, borné, tel que Ω est un ouvert de détermination pour des données à $t = 0$. **Soit** $\Omega_0 = \Omega \bigcap \{t = 0\}$ et $u_0 \in C^\infty(\Omega_0)$
Alors le problème de Cauchy possède une seule solution dans Ω et :

$$\forall\, (t,x) \in \Omega,\ \ u(t,x) = u_0\,(X(s; t, x)) \tag{5.4}$$

LEMME :

$$\Big(\partial_t + c(t,x)\partial_x\Big)u\Big(s, X(s;t,x)\Big) = 0$$

PROPOSITION :
Soit Ω un tube caractéristique. **Alors**

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)} = \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \int_{[0,t]\times I\!R} \partial_x x(s,x) u^2(s,x) \;\; dxds \qquad (5.5)$$

De plus **Si** $\partial_x c(t,x) \leq 0$ **Alors** la fonction $t \longrightarrow \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)}$ est décroissante et la solution est dissipative.
Si $\partial_x c(t,x) = 0$ **Alors** la fonction $t \longrightarrow \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)}$ est constante et la solution est conservative.

PROPOSITION :
Soit $k \in I\!N$. On suppose que $c(t,x) \in C_b^\infty(I\!R^2)$. **Si** $u_0 \in H^k(I\!R)$ **Alors** le problème de Cauchy possède une seule solution u telle que $u \in C^0\Big(t; H^k(I\!R)\Big)$

LEMME :

$$\partial_t v + c\partial_x v + \alpha v = 0$$

variation des constantes

$$v(t,x) = e^{-\int_{[0,t]} \alpha\left(s; X(s;t,x)\right) ds} u(t,x)$$

Alors

$$\partial_t + c(t,x)\partial_x u = 0$$

[1]

5.2 Système hyperbolique symétrique

Soit $(A_j)_{j=1,\dots,N}$, $B \in \mathcal{M}(I\!R^N)$ et I l'identité de $\mathcal{M}(I\!R^N)$.
On suppose que $\forall j = 1, \dots, N$, A_j est symétrique. On définit l'opérateur $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{L} = I\partial_t + \sum_{1\leq j\leq N} A_j \partial_j + B$$

NOTATION :

$$\mathcal{S}(I\!R^N_x) = \Big\{ u \in C^\infty(I\!R^N_x) \;\; tq \;\;\; \forall\, \alpha, \beta, \in I\!N^N,\ \exists\, c > 0 \;\; tq \;\; \sup_{x\in I\!R^N} \big|x^\alpha \partial^\beta u\big| \leq c \Big\}$$

1. Exercice : compléter l'énoncé jusqu'à obtenir un lemme bien rédigé ...

$$C^\infty\left(\mathbb{R}_t^+;\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)\right)=\left\{u\in C^\infty(\mathbb{R}_t^+\times\mathbb{R}_x^N)\ \ tq\ \ \forall\, T\geq 0,\alpha,\beta,\in\mathbb{N}^N,\gamma\in\mathbb{N},\ \exists\ c>0\ \ tq\ \ \sup_{\substack{|t|\leq T\\ x\in\mathbb{R}_x^N}}\left|x^\alpha\partial_t^\gamma\partial_x^\beta u\right|\leq c\right\}$$

THÉORÈME :
Soit $u_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$. **Alors** $\exists!\ u\in C^\infty\left(\mathbb{R}_t^+;\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)\right)$ *tq*

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{L}u=0\ \ dans\ \ \mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_t^+\\ u(0,x)=u_0(x)\ \ dans\ \ \mathbb{R}_x^N\end{array}\right. \tag{5.6}$$

NOTATION :
Soit $u\in C^\infty\left(\mathbb{R}_t^+;\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)\right)$. On note

$$\widehat{u}(t,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}_\xi^N}e^{-\imath x\xi}u(t,x)dx$$

LEMME :
Soit b la plus grande valeur propre de $-(B+B^\star)$. **Alors**

$$\forall\ \xi\in\mathbb{R}_\xi^N,\ \forall\ t\geq 0,\ \ \left\|e^{-\imath t\left(A(\xi)+\frac{B}{\imath}\right)}\right\|\leq e^{tb}$$

LEMME :

$$\left|\partial_{\xi_1}\widehat{u}(t,b)\right|^2\leq e^{tb}\left|\partial_{\xi_1}\widehat{u_0}(\xi)\right|^2+e^{tb}A_1te^{tb}\left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2$$

COROLLAIRE : <u>*Solution de 5.6*</u>
Soit $k\in\mathbb{N}$ et $u_0\in H^k(\mathbb{R}_x^N)$.
Alors $\exists!\ u\in C^0\left(\mathbb{R}_t^+;H^k(\mathbb{R}_x^N)\right)$ telle que u vérifie 5.6.
De plus,

$$\forall\ 0\leq\ell\leq k,\ \ u\in C^\ell\left(\mathbb{R}_t^+;H^{k-\ell}(\mathbb{R}_x^N)\right) \tag{5.7}$$

THÉORÈME : <u>*Complétude de* $C^0\left([0,T];H^k(\mathbb{R}_x^N)\right)$</u>
$C^0\left([0,T];H^k(\mathbb{R}_x^N)\right)$ muni de la norme $\|.\|_{\mathbb{L}^\infty([0,T])}$ est un espace complet.

NOTATION :
Soit $u\in C^0\left([0,T];L^2(\mathbb{R}_x^N)\right)$. **Alors** [2]

$$\forall\ t\geq 0,\ \ \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2=\int_{\mathbb{R}_x^N}\left(u(t,x),\overline{u(t,x)}\right)_{\mathbb{C}^N}dx \tag{5.8}$$

2. On note $(,)_{\mathbb{C}^N}$ le produit scalaire dans $\mathbb{C}^N$

COROLLAIRE : *Estimation globale en énergie*

Soit $u \in C^0\Big([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N_x)\Big)$ solution de 5.6. **Alors** [3]

$$\forall\, t \geq 0,\ \ \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{0 \leq s \leq t} < -(B+B^\star)u(s,.), \overline{u(s,.)} >_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds$$

De plus,

1/ **Si** B est anti-adjoint [4] **Alors** le problème est conservatif.

2/ **Si** $B + B\star \geq 0$ **Alors** le problème est dissipatif.

3. On note $<,>_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

4. $B = -B^\star$

Index