Calcul Scientifique 2000 : lois de conservation scalaires

à remettre pour le 23/11/00

Note. Pour les questions demandant d'effectuer des simulations, on demande d'inclure les figures, un bref commentaire et une copie du programme informatique dans le rapport écrit et de préparer également une sortie sur transparent des figures.

Exercice 1 :

On se propose de résoudre numériquement le problème de Cauchy périodique

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0, & \text{pour } (x,t)\in[-5,5]\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,0) & = & u_0(x), & \text{pour } x\in[-5,5], \\ u(-5,t) & = & u(5,t), & \text{pour } t\in\mathbb{R}_+, \end{array}\right.$$

en utilisant les schémas suivants :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\delta t}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\delta x}=0 \qquad \text{(schéma décentré à gauche)}$$

et

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\delta x}-\frac{a^2\delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\delta x^2}=0 \qquad \text{(schéma de Lax-Wendroff)}$$

Implémentez ces algorithmes dans le langage de votre choix et comparez-les dans les simulations suivantes :

1. On définit u_0 par : $u_0(x)=1$ pour $x\in[-0.5,0.5]$ et $u_0(x)=0$ ailleurs et on fixe $a=0.1$, $\delta x=0.1$. Effectuez les simulations jusqu'à $t=40$ avec $\delta t=0.98$ et $\delta t=1.02$. Tracez les solutions obtenues ainsi que la solution analytique et commentez.
2. Mêmes questions avec $a=-0.1$.
3. Mêmes questions qu'en 1 avec u_0 défini par $u_0(x)=\sin(\pi x)$ et jusqu'à $t=200$.
4. Proposez une autre simulation en modifiant les données de votre choix dans les questions précédentes.

Exercice 2 :

1. On considère le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) & = & 0 & \text{pour } (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{pour } x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

   où $u_0(x)$ vaut -1 sur $[-1,0]$ et 0 ailleurs. Déterminez analytiquement la solution faible entropique bornée pour $t<2$. Tracez cette solution pour $t=1$ et $t=2$.

2. Vérifiez que pour $t > 2$ l'équation de la courbe de choc est $x^2 = 2t$. Tracez la solution pour $t = 4.5$.
3. Implémentez dans le langage de votre choix les deux algorithmes suivants :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \frac{1}{\delta x}\left(\frac{(u_{j+1}^n)^2}{2} - \frac{(u_j^n)^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{(schéma 1)}$$

et

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\delta x} = 0 \qquad \text{(schéma 2)}$$

Notez que le schéma 1 est fondé sur la forme *conservative* de l'équation ($\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$) alors que le schéma 2 est fondé sur la forme *non conservative* ($\partial_t u + u\partial_x u = 0$). Utilisez-les pour résoudre le problème de Cauchy précédent (prendre p.ex. $[-5, 1]$ comme domaine de calcul, $\delta x = 0.01$, $\delta t = 0.009$). Tracez les solutions numériques obtenues pour $t = 1$, $t = 2$ et $t = 4.5$. Commentez.