

Cours De P.-L. Lions - Dauphine (2001-2002)

Rédigé par Eric Bouyé et Nicolas Gausse

Avertissement

Ces notes retranscrivent sept cours donnés par PL Lions au DEA MASE (Dauphine) entre octobre 2001 et janvier 2002.

Table des matières

0	Introduction et grandes lignes	3
0.1	Définition d'une option. Déterminant du prix	3
0.2	Première intuition sur la dynamique du prix	3
0.3	Approche de type utilité	3
1	Lien entre espérances et EDP	5
1.1	Etude de l'équation de la chaleur	5
1.2	Cas d'une diffusion générale	8
2	Contrôle stochastique	10
2.1	Problème posé	10
2.2	Principe de la programmation dynamique	11
2.3	Une notion de solutions moins exigeante : les sursolutions de viscosité	14
3	Marchés complets et formule de Black et Scholes	15
3.1	Ecriture du programme	15
3.2	L'équation de Bellman associée	16
3.3	Résolution du programme dans le cas d'une utilité exponentielle	17
3.4	Le modèle de B&S avec une utilité quelconque	18
4	Evaluation d'options avec contraintes sur la position	19
4.1	Description du problème	19
4.2	Résolution	20
4.3	Analyse qualitative du prix	20
5	Options contingentes à des évènements indépendants du marché	22
5.1	Description du problème	22
5.2	Le programme de Bellman	22
5.3	Résolution	23
5.4	Exemple	23
5.5	Analyse qualitative du prix	24
5.6	Autre approche	25
5.7	Cas de contrats multiples	26
6	Options sur actifs non traités	27
6.1	Description du problème	27
6.2	Résolution	27
6.3	Cas particulier : Φ et $\frac{\beta}{\mu}$ ne dépendent pas de Y	28
7	Options et illiquidité	29
7.1	Description du problème	29
7.2	Resolution	30
7.3	Etude de cas particuliers	32

0 Introduction et grandes lignes

0.1 Définition d'une option. Déterminant du prix

Une option est un contrat entre A et B, donnant lieu à un flux H aléatoire en T . $H = \Phi(X_T)$ où X_t désigne la valeur en t d'un sous-jacent à déterminer.

Exemple $\Phi(x) = x$. Dans ce cas $\pi(\Phi(X_T)) = X_0$.

– Idée, $\forall \Phi : \pi(\Phi(X_T)) = P(X_0, T)$

0.2 Première intuition sur la dynamique du prix

Introduisons $\alpha \approx \frac{P(X+\Delta X, T) - P(X, T)}{\Delta X} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}$. La dérivée de α est la variation de demande en actif sous-jacent issu d'une variation de prix ΔX . Il semble naturel de supposer que la variation de prix est une fonction croissante de la variation de la demande. Dans le cas de l'approximation linéaire on obtient alors

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

associée à la condition aux limites triviale $P(x, 0) = \Phi(x)$. Cette équation annonce B&S.

0.3 Approche de type utilité

0.3.1 Un théorème fondamental

On dispose du contrôle α_t qui est le nombre d'actions détenues. En ne tenant pas compte des effets de liquidités, la valeur du portefeuille à chaque date est

$$\begin{aligned}\pi_t &= \alpha_t \times X_t. \\ \pi_0 &= \pi\end{aligned}$$

L'autofinancement (avec des taux nuls) assure que

$$d\pi_t = \alpha_t \times dX_t.$$

X_t suit une dynamique du type

$$\begin{aligned}dX_t &= \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt \\ X_0 &= x.\end{aligned}$$

Soit une fonction d'utilité $U(x)$ croissante et strictement concave. Deux cas particuliers importants

– CRRA, ie : $-\frac{U''}{xU'} = cte \Rightarrow U(x) = x^\theta$, $\theta \in]0; 1[$. Lorsque $\theta \rightarrow 1$, $\frac{x^\theta - 1}{\theta} \rightarrow \ln(x)$.

- CARA, i.e. : $-\frac{U''}{U'} = cte \Rightarrow U(x) = -e^{-\lambda x}$

Le programme est le suivant

$$V(x, \pi, T) = \sup E(\pi_T - \Phi(X_T))$$

Remarque 1 La solution du programme se décomposera en deux parties : une partie couverture, une partie optimisation de richesse.

Théorème 1 On a

$$V(x, \pi, T) = V_0(x, \pi - P(x, T), T)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_t = \alpha_0 + \frac{\partial P}{\partial x} \\ \text{et } P = E(\Phi(X_T^0)) \end{cases}$$

où α_0 et V_0 sont les solutions du problème pour $\Phi = 0$. X^0 correspond au sous-jacent avec une tendance nulle.

On reviendra sur ce théorème.

0.3.2 Analyse dans certains cas particuliers

Si $\Phi = 0$, $b = 0$. Alors X et π sont des martingales. L'inégalité de Jensen assure que

$$E(U(\pi_T)) \leq U(\pi)$$

Or si $\alpha_t = 0$, l'égalité est atteinte. **La stratégie optimale consiste à ne pas investir quand le prix n'est qu'un bruit sans tendance.**

Si $b = 0$ et Φ quelconque Alors

$$\begin{aligned} V(x, \pi, T) &= U(\pi - P(x, T)) \\ P(x, T) &= E(\Phi(X_T)) \\ \alpha_t &= \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned}$$

En effet, Jensen assure l'inégalité et l'égalité est obtenue avec le processus exhibé (vérification easy avec Ito).

Remarque : il est intéressant de remarquer que $P(x, T) = E(\Phi(X_T))$ résout l'EDP

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0.$$

L'objet de la prochaine section est d'approfondir ce lien.

1 Lien entre espérances et EDP

On pose toujours

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

Les résultats exposés après sont valables en dimension n et pour des coefficients qui dépendent du temps.

Rappel, σ et b sont lipschitz ou au pire, Holder d'exposant $\beta > \frac{1}{2}$, c'est à dire

$$\forall x, y : |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C |x - y|^\beta.$$

L'objectif est de regarder les EDP dont $u(x, t) = E(\Phi(X_t))$ est solution.

1.1 Etude de l'équation de la chaleur

Afin de se fixer les idées, intéressons nous pour commencer, au cas sans tendance, et plus particulièrement, à l'équation de la chaleur simple. Définissons

$$u(x, t) = E(u_0(x + W_t)) \quad (1)$$

où W_t est 1 Mouvement Brownien Standard et u_0 une fonction réelle. Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathcal{R} \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (2)$$

Puisque $W_T \sim N(0, T)$, il est possible de réécrire l'équation (1) sous la forme explicite

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int u_0(x - y) \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) dy \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int u_0(y) \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2T}\right) dy \quad (4)$$

On reconnaît dans (3) un produit de convolution entre u_0 et la densité gaussienne. En effet, u est une somme pondérée de variables aléatoires à densité gaussienne. Quant à (4), elle peut être interprétée comme une moyenne de translatées de $\phi(x, T)$, la densité centrée en 0. Or $\phi(x, t)$ résout (2). Puisqu'il n'y a que des dérivées dans (2), toute translatée de ϕ résout aussi (2), mais avec des valeurs initiales différentes.

Une petite étude de $\phi(x, t)$ nous apprend d'ailleurs que :

- $\forall x \neq 0 : \phi(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$
- $x \rightarrow 0 : \phi(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \delta(x)$

ϕ est appelée solution fondamentale de (2). Elle correspond à une valeur initiale égale au dirac en 0. Formulons certaines hypothèses sur u_0 :

- u_0 continue,
- u_0 est à croissance sous-exponentielle, c'est à dire que : $\exists C > 0 : |u_0(x)| \leq Ce^{C|x|}$

Proposition 1 *Sous ces hypothèses, il vient :*

- La fonction $u(x, t)$ définie par (1) est infiniment régulière en t en en x sur $\mathcal{R} \times]0; +\infty[$.
- Elle résout (2). En outre elle est continue sur $\mathcal{R} \times [0; +\infty[$.
- $\forall T > 0 : \exists M > 0 : |u(x, t)| \leq Me^{M|x|}$,
- u est unique.

Donnons quelques éléments de preuve dans le cas d'une fonction u_0 bornée par une constante C . La démonstration sous-exponentielle s'en déduit aisément mais est plus coûteuse en écritures.

1.1.1 Caractère borné

u est bornée en tant que moyenne d'une fonction bornée.

1.1.2 Continuité en $t \rightarrow 0$

C'est un point clé dans la mesure où financièrement, cela assure que le prix ne saute pas lorsque le sous-jacent est continu.

Formons

$$\begin{aligned} \Delta &= |u(x, t) - u_0(x)| \\ &= \left| \int (u_0(y) - u_0(x)) p(x, y, t) \right| \end{aligned}$$

La probabilité tend vers zéro lorsque $x - y$ est élevé. D'un autre coté, la différence d'utilité tend vers 0 lorsque x tend vers y du fait de la continuité de u_0 . Fixons nous δ strictement positif et découpons Δ en deux parties

$$\Delta = \int_{|x-y| \leq \delta} |u_0(y) - u_0(x)| p(x, y, t) + \int_{|x-y| > \delta} |u_0(y) - u_0(x)| p(x, y, t)$$

où la valeur absolue de l'intégrale a été majorée par l'intégrale de la valeur absolue. Notons

$$M_\delta \equiv \sup_{x \in \mathcal{R}, |x-y| \leq \delta} |u_0(y) - u_0(x)|$$

le module de continuité uniforme de u_0 . En outre remarquons que la densité gaussienne en t peut être réexprimée en fonction de la gaussienne centrée réduite en 1. Il vient alors

$$\Delta \leq M_\delta + \underbrace{\frac{2C}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z| > \delta/\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz}_{I(\delta)}$$

Chacune de ces deux quantités tend vers 0. Plus précisément, nous venons de montrer que l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \left\{ M_\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \exists \eta > 0 : \forall t < \eta : I(\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

est valide, ce qui implique la continuité.

Remarque 2 – *La continuité démontrée est une continuité uniforme en x .*

– *Cette continuité est valide pour des fonctions très générales (nombre fini de discontinuités ou même pire)*

1.1.3 Unicité de la solution

Il existe un grand nombre de démonstrations possibles. Afin de limiter les problèmes, étudions le cas où t est borné par T . Les idées sont les mêmes dans le cas non borné mais le coût technique est relativement élevé. Utilisons une technique générique parfois appelée **principe du maximum**. Considérons deux solutions u et v . La linéarité de l'équation implique que la différence est aussi solution pour une valeur initiale $u_0 = 0$ (la fonction nulle). Il s'agit donc de démontrer que si $u_0 = 0$ alors $\forall x, \forall t : u(x, t) = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons

$$m(\varepsilon) = \sup_{x \in \mathcal{R}, t \in [0, T]} \{u(x, t) - \varepsilon t\}$$

Cas où le sup est un max. Montrons que dans ce cas, le max est nécessairement atteint en 0. Raisonnons par l'absurde et supposons $t > 0$. La condition de maximalité implique donc la concavité en x au point de maximum

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0.$$

D'autre part, les conditions d'optimalité classiques impliquent que :

- si le maximum est atteint en $t < T$, alors $\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon$,
- si le maximum est atteint en T , alors nécessairement $\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \geq 0$,
- dans tous les cas donc : $-\theta = \frac{\partial u}{\partial t} \geq \varepsilon$.

Or, u étant solution de (2), les deux dérivées doivent être égales ce qui est rendu impossible du fait de leur signe. Le maximum ne peut donc être atteint qu'en zéro.

Puisque justement $u(x, 0) = 0$, alors $m(\varepsilon) \leq 0$. En passant à la limite en ε , on obtient alors que

$$u(x, t) \leq 0.$$

Puisque le même raisonnement tient pour $-u$, u est nécessairement uniformément nulle.

Cas où le sup n'est pas un max L'idée est de modifier la définition de $m(\varepsilon)$ de façon à ce que le maximum soit à nouveau atteint. Pour cela, retrancher $\varepsilon \times t$ ne suffit plus mais il faut retrancher une fonction $\varepsilon \times f$, où

f vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

et qui en outre tend¹ vers $-\infty$ quand x tend vers l'infini. Afin de ne pas influencer le comportement en zéro, il est souvent utile que $f(0,0) = 0$. Prenons par exemple $f(x,t) = t + \ln(a+x) - \ln(a)$.

On a alors :

$$m(\varepsilon) = \sup_{x \in \mathcal{R}, t \in [0, T]} \{u(x, t) - \varepsilon(t + \ln(a+x) - \ln(a))\}$$

Le maximum est atteint en un point fini. La concavité au point d'optimalité implique $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq \varepsilon \times \frac{1}{x^2} \leq 0$. En outre, l'optimalité en temps permet toujours d'obtenir $\frac{\partial u}{\partial t} \geq \varepsilon$. La suite est identique...

1.2 Cas d'une diffusion générale

Reprenons le cas d'une diffusion X solution de l'EDS

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

et où u_0 est continue et à croissance polynomiale. Bien sur, b et σ sont Lipschitz. En outre, $\sigma\sigma^T$ est nécessairement définie positive. Dans ce cas :

Théorème 2

$$u(x, t) = E(u_0(X_t))$$

est l'unique solution de l'EDP valable $\forall x \in R, \forall t > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

- u est $C_{x,t}^{2,1}$ sur $R \times]0; +\infty[$
- u est continue sur $R \times [0; +\infty[$
- u est à croissance polynomiale.

¹Dans le cas où u_0 est sous-exponentielle, il faudrait retrancher une fonction qui croisse plus vite qu'une exponentielle.

1.2.1 Cas où u_0 est $C_{x,t}^{2,1}$ sur $R \times [0; +\infty[$

Dans ce cas, pour peu que l'on puisse écrire Ito², le lien entre espérance et EDP est trivial. En effet définissons $u(x, t) \equiv E(u_0(X_t))$.

$$\begin{aligned} \forall t, \forall t_0 & : u(X_t, t) \\ &= u(x, t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma(X_s)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(X_s) \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds + \int_{t_0}^t \sigma(X_s) \frac{\partial u}{\partial x} dW_s \end{aligned}$$

qui n'est nulle en espérance que si le terme de tendance est uniformément nul en x et en t .

1.2.2 Cas où u_0 est $C_{x,t}^{2,1}$ sur $R \times]0; +\infty[$ et uniquement continue³ sur $R \times [0; +\infty[$

Il faut reprendre l'argument précédent mais en passant prudemment à la limite

$$\forall t < t_0 : u(X_t, t_0 - t) = u(x, t_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma(X_s)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(X_s) \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds + \int_0^t \sigma(X_s) \frac{\partial u}{\partial x} dW_s$$

Le passage à l'espérance assure que

$$\forall t < t_0 : E(u(X_t, t_0 - t)) = u(x, t_0).$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre t_0 vers t et à tirer parti d'arguments de convergence dominée.

1.2.3 Dérivation par rapport aux conditions initiales

Lorsque l'on s'intéresse aux fonction $u(X_t, t)$ avec $x = X_0$, il peut être intéressant de calculer la variation de u par rapport à la valeur initiale x , trajectoire par trajectoire. Cela permet en particulier de donner les expressions des grecques lorsqu'il s'agit d'options. Plus précisément, X_t est dérivable P-ps par rapport à x . Les quantités

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\partial X_t}{\partial x} \\ z_t &= \frac{\partial^2 X_t}{\partial x^2} \end{aligned}$$

existent donc et vérifient respectivement les EDS obtenues par dérivation successive⁴

$$\begin{aligned} dy_t &= \sigma'(X_t) y_t dW_t + b'(X_t) y_t dt \\ dz_t &= [\sigma'(X_t) z_t + \sigma''(X_t) y_t^2] dW_t + [b'(X_t) z_t + b''(X_t) y_t^2] dt \end{aligned}$$

² Il faut en effet se rappeler que le lemme d'Ito n'est valable que pour des fonctions à dérivées bornées. Si tel n'est pas le cas, on se ramène à ce cas en faisant à la notion de martingale locale qui permet de borner les dérivées entre deux temps d'arrêt.

³ C'est le cas d'une option digitale par exemple.

⁴ NDR : Il est remarquable de noter que, dans le cadre de B&S, ces équations sont toutes identiques à l'équation du sous-jacent, à la variation des conditions initiales près. En outre, la dérivation faite par rapport à la valeur initiale pourrait être menée par rapport à n'importe quel paramètre d'intérêt. Ainsi, cette astuce semble donner un moyen de calculer rapidement les grecques par EDP ou bien de les obtenir grâce aux mêmes trajectoires de Monte Carlo que celles qui ont servi à calculer le prix de l'option.

soumises aux conditions initiales

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \\z_0 &= 0\end{aligned}$$

2 Contrôle stochastique

2.1 Problème posé

2.1.1 Description de l'état

L'état du système est caractérisé par un vecteur de variables d'états X_t solution d'une EDS du type

$$\begin{aligned}dX_t &= \sigma(X_t, \alpha_t) dW_t + b(X_t, \alpha_t) dt \\X_0 &= x \in \mathcal{R}^N\end{aligned}$$

En finance typiquement, X_t correspond au couple actif et richesse. Les dimensions sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} W \in \mathcal{R}^k : k \text{ est le nombre de facteurs de risque} \\ b(x, \alpha) \in \mathcal{R}^N : N \text{ est le nombre d'actifs} \\ x \in \mathcal{R}^N \\ \alpha \in \mathcal{R}^m : m \text{ est le nombre de contrôles} \\ \sigma(x, \alpha) : (N + m) \times k \end{array} \right.$$

La variable α_t correspond au contrôle (commande) du programme. C'est un processus adapté à valeurs dans un sous-ensemble $A \subset \mathcal{R}^m$. De façon à éviter certains problèmes d'existence de solutions, il vaut mieux prendre A fermé. On définit l'ensemble des contrôles admissibles

$$\mathcal{A} = \{\alpha : \alpha_t \in A \text{ p.s. } \forall t > 0\}$$

2.1.2 Le programme

La fonction à maximiser est appelée *Reward function* (*Cost function* en cas de minimisation). Elle s'écrit sous la forme d'une espérance (dans les cas que nous allons étudier)

$$J(x, T, \alpha) = E(F(X_T))$$

où $F : \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$

Il s'agit alors de déterminer la fonction valeur

$$u(x, T) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x, T, \alpha)$$

2.1.3 Hypothèses techniques

Les hypothèses sur X sont classiques :

$$(i) \exists C > 0 : \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^N \times \mathcal{R}^N, \forall \alpha \in A : \|\sigma(x_2, \alpha) - \sigma(x_1, \alpha)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$$

Les autres hypothèses servent à assurer l'existence des quantités manipulées :

$$(ii) \|\sigma(\cdot, \alpha)\| + \|b(\cdot, \alpha)\| \leq C(1 + \|\alpha\|) : \forall \alpha \in \mathcal{A} \text{ où}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha : \alpha_t \in A \text{ p.s. } E \left(\int_0^t \alpha_s^2 ds \right) < +\infty \forall t > 0 \right\}$$

$$(iii) F \text{ continue et } \exists C > 0 : \forall x \in \mathcal{R}^N : |F(x)| \leq C(1 + \|x\|)$$

2.1.4 Remarques

- L'hypothèse de variance finie des contrôles ne joue que si A n'est pas à borné.
- Beaucoup d'autres jeux d'hypothèses seraient aussi valables
- Tout ce qui sera dit reste vrai pour une fonction objectif dépendant de la trajectoire. L'intuition est la suivante. Si

$$J(x, T, \alpha) = E \left[\int_0^T f(X_t, \alpha_t) dt + F(X_T) \right]$$

il est possible d'introduire une variable *ad hoc* $dy_t = f(X_t, \alpha_t) dt$. Dans ce cas, on est ramené au cas précédent avec une variable supplémentaire

$$\tilde{J}(x, Y, T, \alpha) = E[Y_T + F(X_T)]$$

avec les modifications adéquates.

2.2 Principe de la programmation dynamique

Théorème 3 (Principe d'optimalité) $\forall T_0 \in [0, T]$

$$u(x, T) = \sup_{\alpha_s \in [0, T_0]} E(u(X_{T_0}, T - T_0)) \tag{5}$$

Ce principe procure d'emblée une relation fonctionnelle sur u , ce qui est très précieux. Comme dans la plupart des relations fonctionnelles, l'idée est de dériver en tous les points où c'est possible. Nous allons détailler le cas déterministe, la version stochastique en étant une adaptation très complexe. L'idée intuitive est celle du chemin le plus court pour aller d'un point à un autre qui doit être en chaque point optimal.

Plus précisément, il s'agit de découper le contrôle $\alpha : [0, T] \rightarrow A$ en deux fonctions $\beta : [0, T_0] \rightarrow A$ et $\gamma : [T_0, T] \rightarrow A$. Dans ce cas, la démonstration repose sur les propriétés du *sup* :

$$\begin{aligned} u(x, T) &= \sup_{\alpha} F(X_T) \\ &= \sup_{\beta, \gamma} F(X_T) \\ &= \sup_{\beta} \left[\sup_{\gamma} F(X_T) \right] \\ &= \sup_{\beta} u(X_{T_0}, T - T_0) \end{aligned}$$

2.2.1 L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

La démonstration repose sur l'application du lemme d'Ito. Afin de se pénétrer des mécanismes en jeu, refaisons là "à la main". L'idée est de trouver un équivalent à droite de l'équation (5) lorsque $T_0 = h$ est petit. L'équivalent cherché est en $o(h)$. Il vient

$$\begin{aligned} u(X_h, t - h) &= u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X_h - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_h - x)^2 - \frac{\partial u}{\partial t} h + o\left(h + |X_h - x|^2\right) \end{aligned}$$

En passant à l'espérance, $E(X_h - x) = b \times h + o(h)$ et $E\left((X_h - x)^2\right) = \sigma^2 \times h + o(h)$. L'équation (5) peut alors se réécrire

$$u(x, t) = \sup_{\alpha} \left\{ u(x, t) + h \times \left[\frac{\partial u}{\partial x} \times b + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 - \frac{\partial u}{\partial t} + o(1) \right] \right\}$$

d'où se déduit l'équation fondamentale obtenue par passage à la limite $h \rightarrow 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sup_{\alpha \in A} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} b(x, \alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2(x, \alpha) \right\}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que seule la valeur initiale de α est en jeu dans ce sup et que l'équation HJB est en fait la suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \inf_{\alpha_0 \in A} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x} b(x, \alpha_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2(x, \alpha_0) \right\} = 0 \quad (6)$$

Cette suite de calcul justifie le théorème fondamental suivant

Théorème 4 Si $u \in C_{x,t}^{2,1}(\mathcal{R}^N \times]0; +\infty[)$ alors u vérifie HJB sur $(\mathcal{R}^N \times]0; +\infty[)$ pour la condition initiale $u(x, 0) = F(x)$.

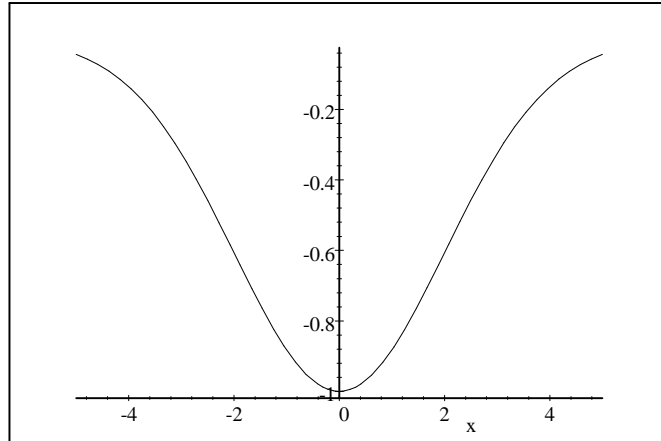
2.2.2 Les limites de l'approche de Bellman : étude de l'équation éconale

Solution naturelle Considérons le problème déterministe consistant à aller le plus loin possible à partir d'un point initial x en dimension 1 en un temps T . Pour ce faire, on dispose d'un véhicule dont la vitesse α est

comprise entre -1 et 1. L'état du système est déterminé par la position $X(t)$ dont les variations sont données par

$$dX_t = \alpha_t dt.$$

La distance d'un point X à un point Y est mesurée par une fonction paire $F(x)$ croissante sur R^+ , par exemple $F(x) = -\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$



La fonction valeur est donc définie par

$$u(x, t) = \max_{\alpha \in [-1; 1]} F(X_T)$$

et vérifie l'équation de Bellman

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \inf_{\alpha \in [-1; 1]} \left(-\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0 \quad (8)$$

associée à la condition initiale

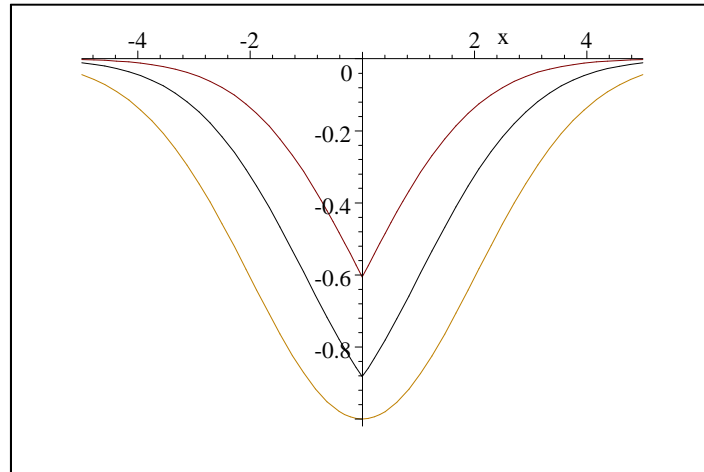
$$u(x, 0) = F(x)$$

Intuitivement ou mathématiquement on trouve que

$$u(x, t) = F(x + t) : \forall x > 0$$

$$u(x, t) = F(x - t) : \forall x < 0$$

$$u(0, t) = F(t) = F(-t) : x = 0$$



$u(x, t)$ est représentée en fonction de x aux dates 0, 1 et 2.

Comme on le voit, et c'est un phénomène assez général, $u(x, t)$ n'est pas dérivable en $x = 0$, dès que $t \neq 0$.

Des solutions fallacieuses A partir de la solution précédente, il est possible d'en obtenir une infinité d'autres. Il suffit de rajouter des solutions nulles en zéro, et vérifiant (8) en tout point de dérivabilité. Par exemple, une fonction "triangle" du type

$$\begin{cases} v(x, t) = k \times (t + |x|) : |x| \leq t \\ v(x, t) = 0 : |x| \geq t \end{cases}, \quad k > 0$$

fonctionne et toutes les fonctions $u + v$ sont aussi solution de (8) pour les mêmes valeurs initiales. Comment discriminer alors les "bonnes" solutions des "mauvaises".

2.3 Une notion de solutions moins exigeante : les sursolutions de viscosité

2.3.1 Résultats

L'équation (6) ne tient qu'en les points en lesquels u est $C^{2,1}$. Or il est typique que les solutions optimales ne soient pas dérivables et que des coins "apparaissent". On peut penser par exemple au max entre x et $2x - 1$ (coin orienté vers le haut) ou au min de cette même fonction (coin orienté vers le bas). Il est donc naturel de chercher des solutions valables en ces points non dérivables. L'idée est de trouver un DL non nécessairement unique en ces points mais qui ne fasse pas appel à la notion de dérivée. Ainsi dès qu'il existe un triplet (p, M, λ) tel que

$$u(x, t) \geq u(x_0, t_0) + p(x - x_0) + \frac{1}{2}M(x - x_0)^2 + \lambda(t - t_0) + o\left(|t - t_0| + |x - x_0|^2\right) \quad (9)$$

alors l'équation (6) se transforme en

$$\lambda + \inf_{\alpha_0 \in A} \left\{ -pb(x, \alpha_0) - \frac{1}{2}M\sigma^2(x, \alpha_0) \right\} \geq 0. \quad (10)$$

L'équation (10) est une sur-solution adaptée au DL par en dessous (9). Dans le cas d'un DL par au dessus, on parlerait de sous-solutions. Les deux théorèmes ci-après précisent cette intuition de façon formelle. Rappelons tout d'abord l'équation générale (*HJB*) en dimension N

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \inf_{\alpha \in A} \left[-\frac{1}{2} \text{Trace}(\sigma \sigma^\top D_x^2 u) - b(x) D_x u \right] = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (11)$$

Théorème 5 *Soit u continue sur $\mathcal{R}^N \times]0; +\infty[$ et vérifiant $u(x, 0) = u_0(x) \forall x \in \mathcal{R}^N$. telle que $\forall (x_0, t_0) \in \mathcal{R}^N \times]0; +\infty[$*

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^N, M \text{ mat sym } N \times N \\ u(x, t) \leq u(x_0, t_0) + \lambda(t - t_0) + \langle p, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle M(x - x_0), x - x_0 \rangle \\ + o\left(\|x - x_0\|^2 + |t - t_0|\right) \end{aligned}$$

alors u est une sur-solution de viscosité de (11) ce qui signifie que

$$\lambda + \inf_{\alpha \in A} \left[-\frac{1}{2} \text{Trace}(\sigma \sigma^\top M) - \langle p, b(x) \rangle \right] \leq 0. \quad (12)$$

La notion de sous-solution est équivalente mais pour les DL par au dessus

Théorème 6 *Si u est une sursolution de (11) vérifiant*

$$\begin{aligned} \exists m > 0 : \forall T < \infty : \exists C \\ |u(x, t)| \leq C(1 + |x|^m) \end{aligned}$$

alors elle est unique.

Remarque 3 *Cette notion de solution peut être étendue aux fonctions discontinues simples.*

2.3.2 Elimination des solutions parasites

Retournons à l'équation éconale et demandons nous maintenant si $u + v$ en est une sursolution. Pour se convaincre, il suffit d'étudier la solution $u + v$ en zéro. En ce point, en effet, l'inégalité (12) ne peut être vérifiée du fait de l'apparition du coin vers le haut, ce qui disqualifie toutes les solutions autres que la solution naturelle u .

3 Marchés complets et formule de Black et Scholes

3.1 Ecriture du programme

Soit un actif dont la valeur actualisée à la date t est donnée par l'EDS

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma(S_t) dW_t + b(S_t) dt \\ S_0 &= S. \end{aligned} \quad (13)$$

et vérifiant les hypothèses standard. Le coefficient $b(S_t)$ représente la rentabilité instantanée de l'actif en excès du taux sans risque. Soit α_t la quantité de richesse investie en actif sous jacent. Si l'on se restreint aux stratégies autofinancées, la richesse actualisée P_t à la date t est elle guidée par

$$\begin{cases} dP_t = \alpha_t dS_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Quant à l'option à couvrir, elle est définie par un pay-off $\Phi(S_T)$. L'utilité choisie est de la forme $U(z) = 1 - e^{-\lambda z}$ (Cf cours n°1). Le choix de l'exponentielle associée à la modélisation de la richesse en quantité et non en pourcentage permet d'aboutir à des calculs plus simples que prévus. Détaillons ce point. La richesse finale va être de la forme

$$P_T = P + \int_0^T \alpha_t dS_t$$

Donc son utilité va pouvoir se dissocier

$$U(P_T) = 1 - \exp(-\lambda P) \times \exp\left(-\lambda \int_0^T \alpha_t dS_t\right). \quad (14)$$

Ainsi, lors du passage à l'espérance, la richesse initiale est extraite ce qui rend la stratégie optimale **indépendante de la richesse initiale**. La sortie de la variable P permet de réduire la dimension du problème.

3.2 L'équation de Bellman associée

Le programme de Bellman s'écrit alors

$$V(S, P, T) = \sup_{\alpha} E(U(P_T - \Phi(S_T)))$$

où (S_t, P_t) est le vecteur d'état du système, α_t est le contrôle et $u_0(x) = U(P_0 - \Phi(S_0))$. Le vecteur d'état est solution de

$$\begin{cases} dS_t = \sigma(S_t) dW_t + b(S_t) dt \\ dP_t = \alpha_t \sigma(S_t) dW_t + \alpha_t b(S_t) dt \end{cases}$$

La fonction valeur est donc solution de l'équation (HJB)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\alpha} \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} - \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial S} - b \frac{\partial V}{\partial S} - \alpha b \frac{\partial V}{\partial P} \right\}$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - b \frac{\partial V}{\partial S} + \min_{\alpha \in \mathcal{R}} \left\{ -\frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} - \alpha \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial S} - \alpha b \frac{\partial V}{\partial P} \right\} \quad (15)$$

La fonction à minimiser est un polynôme de degré 2 en α . Pour que le minimum existe, il faut que le coefficient en x^2 soit négatif. Dans le cas présent ce coefficient est égal à $\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}$. Ce coefficient est positif ssi V est une fonction concave de la richesse initiale. En reprenant l'équation (14), il vient naturellement que

$$V = 1 - \exp(-\lambda P) \times \underbrace{\inf_{\alpha} E \exp\left(-\lambda \int_0^T \alpha_t dS_t\right)}_{\text{constante}}$$

En tant qu'exponentielle négative de P , V est nécessairement concave ce qui permet d'affirmer que le **contrôle α existe et qu'il est unique**. En outre, la remarque précédente incite à rechercher V sous la forme

$$V(S, P, T) \equiv 1 - \exp(-\lambda(P - u(S, T))). \quad (16)$$

3.3 Résolution du programme dans le cas d'une utilité exponentielle

3.3.1 Principe

La résolution du programme ne pose maintenant plus de problèmes conceptuels mais nécessite des calculs assez lourds qu'il faut malheureusement mener à bien pour obtenir le prix. Le schéma est le suivant : la minimisation en α dans (15) permet d'obtenir le α optimal

$$\alpha_{opt} = -\frac{1}{\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial S} + b \frac{\partial V}{\partial P} \right) \quad (17)$$

ou encore, en utilisant la forme donnée par (16)

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{\lambda} \frac{b}{\sigma^2} + \frac{\partial u}{\partial S}. \quad (18)$$

L'injection de (18) dans (15) permet maintenant d'obtenir une équation en u .

3.3.2 Solution

Lorsque l'actif suit une diffusion définie par (13), alors le prix d'une option vérifie toujours l'EDP suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{b^2}{\sigma^2} = 0 \\ \alpha_{opt} = \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{\lambda} \frac{b}{\sigma^2} \\ u(S, 0) = \Phi(S) \end{cases} \quad (19)$$

La stratégie de couverture optimale apparaît naturellement comme une combinaison entre la couverture des variations de l'option $(\frac{\partial u}{\partial S})$ et l'investissement optimal standard $(\frac{1}{\lambda} \frac{b}{\sigma^2})$.

Cette séparation peut être effectuée de façon plus formelle. Introduisons en effet u_0 la solution de (19) pour $\Phi = 0$ (cas de l'allocation optimale de portefeuille). Dans ce cas, $\pi = u - u_0$ vérifie toujours (19) pour une stratégie optimale d'investissement $\alpha^\pi = \alpha - \alpha^0 = \frac{\partial u}{\partial S}$. La valeur initiale π_0 peut être assimilée au prix de l'option Φ .

3.3.3 Notion de prix d'indifférence dans le cas de l'utilité exponentielle

Comparons pour terminer les fonctions valeurs des deux programmes ($\Phi = 0$ et Φ quelconque). Dans le premier cas :

$$V_0(S, P, T) = 1 - \exp(-\lambda(P - u_0))$$

Alors que dans le deuxième

$$\begin{aligned} V(S, P, T) &= 1 - \exp(-\lambda(P - u)) \\ &= 1 - \exp(-\lambda(P - (u - u_0) - u_0)) \\ &= V_0(S, P - \pi, T) \end{aligned}$$

Ce résultat extrêmement intéressant fait apparaître le prix π de l'option comme le montant qui rend indifférent entre

- rentrer dès aujourd'hui dans une stratégie d'investissement standard, $\alpha = \frac{1}{\lambda} \frac{b}{\sigma^2}$, mais avec une richesse initiale diminuée de π ,
- investir avec une richesse initiale P intacte et bénéficier d'un pay-off terminal retranché de la valeur aléatoire de l'option Φ .

Cette caractérisation procure un outil puissant pour donner des prix en marchés incomplets. La différence sera la suivante : le prix d'indifférence obtenu ici ne dépend pas de l'aversion au risque λ de l'agent ce qui rend le prix universel. Dans le cas incomplet, le prix d'indifférence devra être vu comme une valeur dépendante de l'aversion au risque de l'agent.

3.4 Le modèle de B&S avec une utilité quelconque

Rappelons l'équation (15)

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - b \frac{\partial V}{\partial S} + \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} - \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial P} - b \alpha \frac{\partial V}{\partial P} \right\} = 0.$$

Le contrôle optimal décrit par l'équation (17) est égal à

$$\alpha = - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial P} + \frac{b}{\sigma^2} \frac{\partial V}{\partial P} \right\}.$$

Réinjecté dans (15), il vient l'équation générale ci-après

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - b \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\left(\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial P} + \frac{\partial V}{\partial P} \right)^2}{2\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}} = 0. \quad (20)$$

De même que pour l'utilité exponentielle, on cherche le prix de l'option *via* l'égalité d'indifférence

$$V(S, P, t) = V_0(S, P - u(S, t), t).$$

Il suffit maintenant d'injecter cette forme dans (20) et de se cramponner aux calculs. Commençons par calculer les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &= -\frac{\partial V_0}{\partial S} - \frac{\partial V_0}{\partial P} \frac{\partial u}{\partial S}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial S^2} - 2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial S \partial P} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial P^2} \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)^2 - \frac{\partial V_0}{\partial P} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}, \end{aligned}$$

puis injectons les dans (20) de façon à obtenir la formule (horrible) ci-après :

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial V_0}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial P} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial S^2} + \sigma^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial S \partial P} \frac{\partial u}{\partial S} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial P^2} \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)^2 \\
 & + \frac{\partial V_0}{\partial P} \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - b \frac{\partial V_0}{\partial S} + b \frac{\partial V_0}{\partial P} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\left(\sigma^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial S \partial P} - \sigma^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial P^2} \frac{\partial u}{\partial S} + b \frac{\partial V_0}{\partial P} \right)^2}{2\sigma^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial P^2}}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Du fait de mécanismes profonds liés à la complétude du marché, la plupart des termes s'annulent pour aboutir à

$$\frac{\partial V_0}{\partial P} \times \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \right\} = 0. \tag{22}$$

Il suffit alors de chercher la solution par annulation du deuxième terme. Les résultats d'unicité permettent de dire ensuite que la solution obtenue est unique, ce qui autorise à ne pas tenir compte des possibles V telles que $\frac{\partial V_0}{\partial P}$.

4 Evaluation d'options avec contraintes sur la position

4.1 Description du problème

Supposons que la couverture α_t soit contrainte à ne pas sortir d'un intervalle

$$\forall t : c_1 \leq \alpha_t \leq c_2 \text{ ou } \alpha_t \in A = [c_1, c_2]$$

avec $-\infty \leq c_1 < c_2 \leq +\infty$. Dans ce cas, c_1 et c_2 sont des constantes, on pourrait résoudre le problème pour des fonctions $c_1(S, t)$ et $c_2(S, t)$ de S et de t . Nous ferons l'hypothèse d'une tendance nulle ($b \equiv 0$). Dans le cas avec tendance, il y aurait des problèmes un peu plus épineux. De même, on supposera qu'à chaque date $c_1 \leq 0 \leq c_2$. La fonction valeur s'écrit classiquement

$$V(S, P, t) = \sup_{\forall t: \alpha_t \in [c_1, c_2]} \mathbf{E}[U(P_t - \Phi(S_t))]$$

avec une fonction d'utilité $U(z) = 1 - \exp(-\lambda z)$ où $\lambda > 0$. Le prix d'indifférence π est défini par l'égalité

$$\forall t : V(S, P, t) = U(P - \pi_t)$$

La seule différence par rapport au cas complet réside dans le fait que le max n'est pas pris dans \mathcal{R} tout entier mais dans le segment $[c_1, c_2]$. Pour autant, π n'est toujours qu'une fonction de S et t en effet

$$\begin{aligned}
 V(S, P, t) &= 1 - \inf_{\alpha \in [c_1, c_2]} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \left(P + \int_0^t \alpha_S dS_s \right) + \lambda \Phi(S_t) \right\} \right] \\
 V(S, P, t) &= 1 - \exp(-\lambda P) \underbrace{\inf_{\alpha \in [c_1, c_2]} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \int_0^t \alpha_S dS_s + \lambda \Phi(S_t) \right\} \right]}_{=\exp(\lambda \pi_t)}
 \end{aligned}$$

4.2 Résolution

L'équation HJB est standard et s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \inf_{\alpha_t \in [c_1, c_2]} \left\{ -\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} - \sigma^2 \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial P} \right\} = 0. \quad (23)$$

L'injection de π dans l'EDP ci-dessus amène

$$\lambda \exp \{-\lambda (P - \pi)\} \left(-\frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} + \lambda \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial S} \right)^2 + \inf_{\alpha_t \in [c_1, c_2]} \left\{ \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} \lambda - \sigma^2 \alpha \lambda \frac{\partial \pi}{\partial S} \right\} \right) = 0,$$

qui se réécrit comme

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} - \lambda \frac{\sigma^2}{2} \inf_{\alpha_t \in [c_1, c_2]} \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial S} - \alpha \right)^2 \right\} = 0 \\ \pi(S, 0) = \Phi(S) \\ V(S, P, t) = u(P - \pi(S, t)) \end{cases} \quad (24)$$

qui se résout simplement en

$$\alpha_{opt} = \begin{cases} c_1 & \text{si } \frac{\partial \pi}{\partial S} \leq c_1 \\ \frac{\partial \pi}{\partial S} & \text{si } c_1 \leq \frac{\partial \pi}{\partial S} \leq c_2 \\ c_2 & \text{si } \frac{\partial \pi}{\partial S} \geq c_2 \end{cases} \quad (25)$$

Si cette équation ne possède pas a priori de solution analytique, sa résolution numérique ne pose pas de problèmes insurmontables. Cependant, du fait de la non-linéarité de l'équation, il faut introduire un décentrage dans le calcul des dérivées premières, d'autant plus nécessaire que λ est grand.

4.3 Analyse qualitative du prix

4.3.1 Croissance du prix en λ

Notons π_{λ_1} la solution de (24) pour $\lambda = \lambda_1$. Notons en outre \mathcal{L}_λ l'opérateur associé à (24) pour une aversion au risque λ . Calculons maintenant $\mathcal{L}_{\lambda_2}(\pi_{\lambda_1})$ avec $\lambda_2 < \lambda_1$. Il vient simplement que

$$\mathcal{L}_{\lambda_2}(\pi_{\lambda_1}) = (\lambda_1 - \lambda_2) \times \frac{\sigma^2}{2} \min_{\alpha_t \in [c_1, c_2]} \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial S} - \alpha \right)^2 \right\} \quad (26)$$

et donc que

$$\mathcal{L}_{\lambda_2}(\pi_{\lambda_1}) \geq 0.$$

Ainsi π_{λ_1} est une sursolution du problème associé à λ_2 ce qui implique nécessairement que $\pi_{\lambda_1} > \pi_{\lambda_2}$.

Le prix de l'option est donc croissant en λ . Dans la plupart des cas, cela ne signifie pas qu'il tende vers l'infini pour des aversions au risque infinies. Il tend en fait vers un prix appelé prix de surréplication correspondant à une surréplication presque sûre du profil de l'option. Détaillons un peu.

4.3.2 Aversion au risque infinie et surréplication

Divisons l'équation (24) par λ . Lorsque λ tend vers l'infini, tous les termes tendent vers 0 sauf le terme non linéaire devenu indépendant de λ . Heuristiquement, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, on comprend que l'on doit aussi avoir

$$\forall t : \min_{\alpha_t \in [c_1, c_2]} \left(\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial S} - \alpha \right)^2 \rightarrow 0$$

Raisonnons directement sur π_∞ en supposant qu'il existe. Un problème se pose en zéro où $\pi_\infty(S, 0)$ doit normalement être égal à $\Phi(S)$. Deux cas se présentent alors selon que Φ vérifie ou non la contrainte $\frac{d\Phi(S)}{dS} \in [c_1, c_2]$. Dans le premier cas, le min est égal à zéro : le produit est parfaitement duplicable et son prix ne dépend pas de l'aversion au risque. Dans le second cas, les contraintes sont réellement contraignantes. Il se passe alors un phénomène du type couche limite en mécanique des fluides. Puisque la condition aux limites ne peut être respectée, on va la modifier au prix d'un saut de Φ tel que $\pi_\infty(S, 0) = \Phi(S)$ vers $\widehat{\Phi}$ tel que

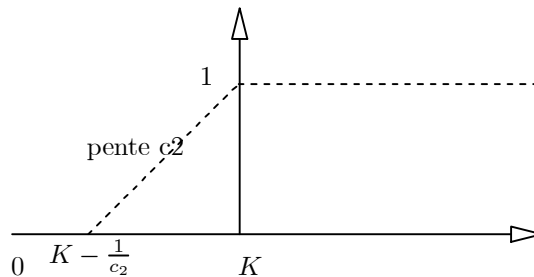
$$\pi(S, t) \xrightarrow{t \geq 0} \widehat{\Phi}(S)$$

où $\widehat{\Phi}$ est la plus petite fonction supérieure à Φ vérifiant $\frac{d\widehat{\Phi}(S)}{dS} \in [c_1, c_2]$. Dans ce cas, π_∞ vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_\infty}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \pi_\infty}{\partial S^2} = 0 \\ \pi_\infty(S, 0) = \widehat{\Phi}(S) \\ V(S, P, t) = u(P - \pi_\infty(S, t)) \end{cases} \quad (27)$$

Le résultat a été obtenu récemment de façon propre par – SONER et TOUZI (2000)⁵ [?] . Malheureusement, il n'est pas très utile d'un point de vue pratique car π_∞ est généralement très élevé.

Etudions le cas d'une option digitale avec $c_1 = 0$ et $0 < c_2 < \infty$. Il s'agit de trouver le plus petit pay-off supérieur à la fonction échelon mais dont la dérivée soit bornée par c_2 . Le résultat est naturellement donné par la fonction suivante :



Remarquons que le prix de surréplication du call avec contrainte de $\delta < 1$ amènerait à un prix infini. En revanche, celui de tout call spread (K_1, K_2) est fini, même si le prix de surréplication tend vers l'infini lorsque $K_2 \rightarrow \infty$.

⁵ downloadable <http://home.ku.edu.tr/~msoner/gammacons.pdf.zip>

4.3.3 L'approximation linéaire pour les faibles aversions au risque

Cherchons π_λ sous la forme

$$\pi_\lambda = \pi_0 + \lambda\pi_1 + o(\lambda) \tag{28}$$

soit le prix B&S (obtenu pour une aversion au risque nul) plus une correction du premier ordre. L'uniformité du $o(\lambda)$ en S et t devrait être précisée.

On vérifie simplement que π_1 est solution de l'EDP ci-après

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2\pi_1}{\partial S^2} = \frac{\sigma^2}{2} \min_{\alpha_t \in \mathcal{A}} \left\{ \left(\frac{\partial\pi_0}{\partial S} - \alpha \right)^2 \right\}$$

dans laquelle λ a disparu. La condition aux limites quant à elle devient $\pi_1(0) = 0$ puisque $\pi_0(S, 0) = \pi_\lambda(S, 0) = \Phi(S)$. Cette condition aux limites associée à l'EDP précédente permet de calculer explicitement la correction à apporter à π_0 et d'obtenir explicitement l'expression de π_λ sous la forme (28). Remarquons que l'on pourrait obtenir le DL à l'ordre n du prix en λ par application de la même astuce.

Cette méthode est générale pour la résolution d'EDP. C'est la méthode de variation de la constante introduite par Newton pour étudier les premières non linéarités à proximité d'une solution linéaire.

5 Options contingentes à des évènements indépendants du marché

5.1 Description du problème

Soit un actif S dont la dynamique est donnée par (13) sur l'espace de probabilité $(\cdot, F, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, W_t)$. Introduisons un évènement extérieur représenté par une variable aléatoire Y de loi m **indépendante des évènements liés à W_t** . Imaginons maintenant que l'on doive couvrir une option dont le pay-off $\Phi(S_T, Y)$ est une fonction de S_T et de Y . Un exemple typique est les *tender options* (options sur appel d'offres) où Y suit une loi binomiale sur l'évènement "signature du contrat" que l'on peut supposer indépendante du cours du change éventuel à couvrir.

Dans un tel cadre, les espérances sont prises sous la loi produit $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes m$, c'est à dire la loi la plus simple capable de mesurer Y et $(W_t)_{t \leq T}$.

5.2 Le programme de Bellman

La fonction valeur s'écrit de façon standard

$$\begin{aligned} V(S, P, T) &= \sup_{\alpha} \mathbf{E} [u(P_T - \Phi(S_T, Y))] \\ &= \sup_{\alpha} \mathbf{E} \left[\int u(P_T - \Phi(S_T, Y)) dm(y) \right]. \end{aligned}$$

Elle vérifie l'équation HJB classique, à la condition terminale près qui correspond à une égalité en moyenne, prenant en compte les différentes réalisations possibles de l'évènement non couvrable :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - b \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\left(\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial P} + b \frac{\partial V}{\partial P}\right)^2}{2\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}} \quad (29)$$

$$V(S, P, 0) = \int u(P - \Phi(S, y)) dm(y) = E_Y(u(P - \Phi(S, \cdot))) \quad (30)$$

Dans le cas où m est une masse de Dirac, l'équation (30) redevient la condition certaine de Black et Scholes.

5.3 Résolution

En suivant le même raisonnement que dans les sections précédentes, il vient naturellement que le prix d'indifférence π de l'option est solution de l'EDP

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = 0$$

mais avec une solution initiale issue de l'égalité (30)

$$1 - \exp\{-\lambda(P - \pi(S, 0))\} = \int [1 - \exp\{-\lambda(P - \Phi(S, Y))\}] dm(y),$$

qui devient

$$\pi(S, 0) = \frac{1}{\lambda} \ln \int \exp\{\lambda \Phi(S, Y)\} dm(y). \quad (31)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \ln E_Y(\exp\{\lambda \Phi(S, \cdot)\}) \quad (32)$$

Le prix obtenu est donc un prix Black et Scholes appliqué à un pay-off modifié.

5.4 Exemple

Etudions le cas d'une tender option. Supposons qu'un contrat doit être signé donnant lieu à un flux sortant de dollars. Il s'agit pour l'entreprise de figer le cours d'achat du dollar aujourd'hui et donc (par exemple) d'acheter un call sur dollar. Pour autant, l'entreprise estime à $p\%$ ses chances de réussite dans l'appel d'offre. Comment doit-elle couvrir l'option ? Quel prix doit-elle lui attribuer ?

Reprenons le calcul effectué plus haut. Dans la situation décrite, le contrat à couvrir est de la forme $\Phi(S) \times Y$, où Y est une loi de Bernoulli définie par

$$\Pr(Y = 1) = p$$

$$\Pr(Y = 0) = 1 - p.$$

Le payoff à couvrir est donc donné par l'adaptation de l'équation (31) à la loi de Bernoulli

$$\pi(S, 0) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(p e^{\lambda \Phi(S)} + (1 - p) \right), \quad (33)$$

où Φ est le pay-off du call. Le pay-off possède alors la forme suivante

$$p = 0.3$$

$$\lambda = 1$$

$$\Phi(S) = \max(S - 1, 0)$$

$$g(S) = p \times \Phi(S)$$

$$f(S) = \frac{1}{\lambda} \ln (pe^{\lambda\Phi(S)} + (1 - p))$$

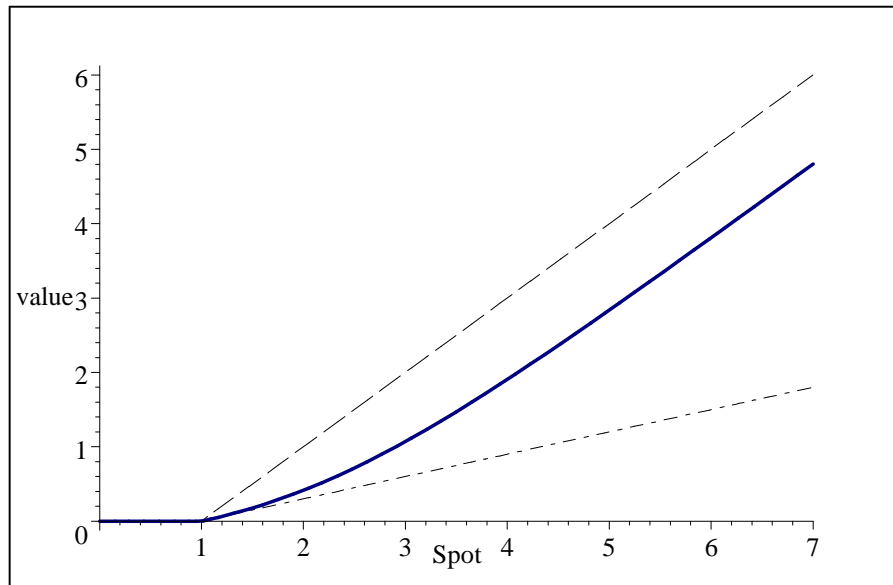


FIG. 1: Ecart entre le profil standard et le profil avec risque exogène

5.5 Analyse qualitative du prix

Analysons la courbe obtenue plus haut. Pour ce faire, étudions tout d'abord l'impact du niveau du payoff puis celui de l'aversion au risque. Remarquons que l'analyse qui va suivre est très dépendante du choix de la fonction d'utilité.

5.5.1 Niveau du payoff

Intéressons nous aux tangentes de la courbe au niveau du strike et de l'asymptote infinie. Lorsque $\Phi(S)$ est petit, il est possible de trouver un équivalent de l'équation (33). Il vient

$$\pi(S) \approx p \times \Phi(S)$$

qui est matérialisé sur le graphique par la demi-droite inférieure de pente p . Lorsque S tend vers l'infini, il vient

$$\pi(S) \underset{+\infty}{\approx} \Phi(S) - \left(-\frac{1}{\lambda} \ln p\right).$$

Ainsi, le profil à couvrir correspond au profil initial diminué d'une quantité fixe inversement proportionnelle à l'aversion au risque et proportionnelle à la quantité d'incertitude liée à la réussite du projet $(-\ln p)$.

5.5.2 Aversion au risque faible

Lorsque λ est petit il est possible d'effectuer un D.L. à l'ordre 2 de l'équation (31) :

$$\pi(S, 0) \approx \mathbf{E}[\Phi(S, Y)] + \frac{\lambda}{2} \mathbf{Var}[\Phi(S, Y)] + o(\lambda^2) \quad (34)$$

ce qui donne dans le cas du modèle binomial

$$\pi(S, 0) = p\Phi(S) + \frac{\lambda}{2}p(1-p)\Phi^2(S) \quad (35)$$

Ainsi, la couverture au premier ordre d'un risque exogène consiste à le couvrir en moyenne : c'est le premier terme, correspondant à une aversion au risque nul. Sur le graphique, ce premier terme se traduit par une tangente à la courbe rouge égale à p fois le payoff à couvrir. Le terme du deuxième ordre fait apparaître l'aversion au risque et la relie à la variance du risque supporté.

5.5.3 Aversion au risque infinie et surréplication

En rappelant que pour $f \geq 0$,

$$\int f^\lambda dx \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\approx} (\text{"sup"} f)^\lambda$$

on obtient

$$\pi(S, 0) = \sup_{y \in \text{supp}(\mathbf{m})} \text{ess } \Phi(S, Y)$$

Ainsi, la stratégie consiste à couvrir le profil associé au tirage de Y le plus pénalisant, pris comme certain. Dans le cas de la loi de Bernoulli cela revient à prendre la probabilité p égale à 1 et donc à couvrir l'intégralité du call.

5.6 Autre approche

Le résultat précédent peut se retrouver par un raisonnement plus probabiliste d'espérance conditionnelle c'est à dire de projection du pay-off sur la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ des prix *in fine*. Par souci de simplicité, notons $H \equiv \Phi(S, Y)$

A chaque date, la fonction valeur est égale à

$$V(P_t, S_t, t) = \mathbf{E}[1 - \exp\{-\lambda(P_t - H)\} | \mathcal{F}_t]$$

puisque l'aléa Y n'a pas été observé et que seuls les prix jusqu'en t ont été observés. Mais puisque la richesse est issue d'un contrôle α_t , \mathcal{F}_t mesurable, et qu'elle est solution de l'EDS

$$dP_t = \alpha_t dS_t,$$

elle est elle-même mesurable ce qui permet de la sortir de l'espérance conditionnelle sous P et de ne plus garder que l'aléa sous Y . Il vient donc

$$V(P_t, S_t, t) = 1 - e^{-\lambda P_t} \mathbf{E}_{\mathbb{Y}} [\mathbf{E}_{\mathbb{P}} [e^{\lambda H} \mid \mathcal{F}_t]]$$

L'expression précédente correspond à une moyenne (loi de Y) des projections d'utilités. Or le prix d'indifférence est défini à chaque date par l'égalité

$$1 - e^{-\lambda(P_t - \pi(S_t, t))} = V(P_t, S_t, t)$$

ce qui permet de retrouver le résultat précédent

5.7 Cas de contrats multiples

Les stratégies étudiées plus haut semblent inadaptées dans le cas d'un contrat isolé. En revanche, dans le cas de plusieurs contrats, regardons comment la loi des grands nombres permet de réduire la variance du pay-off. Prenons le cas de N contrats équipondérés dont on cherche à calculer le pay-off moyen

$$\tilde{\Phi}(S, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(S, Y_i) \tag{36}$$

avec $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ un vecteur d'événements extérieurs supposés i.i.d. et de loi m . Le prix terminal moyen est égal à

$$\pi(S, 0) = \frac{1}{\lambda} \ln \mathbf{E} \left(e^{\lambda \times \tilde{\Phi}(S, Y)} \right)$$

Intéressons nous au cas d'un grand nombre de contrats. Le théorème centrale limite permet d'affirmer que

$$\tilde{\Phi}(S, Y) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{loi} \text{Gaussienne} \left(E_Y(\Phi), \frac{1}{N} \times Var_Y(\Phi) \right)$$

où les espérances et les variances sont prises sous la loi m de Y . Asymptotiquement en N , la valeur initiale de la fonction valeur est donc égale à l'espérance de l'exponentielle d'une gaussienne, objet que l'on sait calculer :

$$X \stackrel{loi}{=} \text{Gaussienne}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(e^{\lambda X}) = e^{\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2}. \tag{37}$$

L'utilisation de la propriété précédente permet de calculer un équivalent de $V(S, 0)$:

$$V(S, 0) \underset{N \rightarrow +\infty}{\approx} E(\Phi) + \frac{\lambda}{2N} Var(\Phi)$$

Ainsi, l'augmentation du nombre de contrats permet de centrer le pay-off terminal autour de sa valeur moyenne en limitant la dispersion des tirages.

Une piste de recherche intéressante consisterait à lever de l'hypothèse d'indépendance de Y vis-à-vis de la dynamique des prix. En particulier, cela serait très adapté à la modélisation du risque de crédit.

6 Options sur actifs non traités

6.1 Description du problème

On suppose l'existence d'une option sur un sous-jacent X qui n'est pas échangeable sur le marché. Cependant, on dispose pour la couverture d'un actif Y corrélé à X . La dynamique des deux actifs est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t, Y_t) dW_t + b(X_t, Y_t) dt, & X_0 = x \in \mathcal{R} \\ dY_t = \mu(X_t, Y_t) dB_t + \beta(X_t, Y_t) dt, & Y_0 = y \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (38)$$

avec σ, b, μ, β Lipschitz en (X, Y) , W_t et B_t deux browniens corrélés tels que $\mathbf{E}[W_t B_t] = \rho t$ avec $-1 \leq \rho \leq 1$. L'évolution de la richesse est guidée par $dP_t = \alpha_t dY_t$ dans l'espace de probabilité $(\cdot, F, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ avec W_t, B_t, α_t adaptés à \mathcal{F}_t . En pratique, σ, b sont indépendants de Y et μ, β sont indépendants de X , mais la résolution sera faite dans un cadre général. Le cas dépendant pourrait rendre compte de modèles co-intégrés.

La fonction valeur s'écrit alors

$$V(X, Y, P, t) = \sup_{\alpha_t} \mathbf{E}[u(P_t - \Phi(X_t, Y_t))] \quad (39)$$

6.2 Résolution

La fonction valeur est solution de l'équation de Bellman

$$\begin{aligned} 0 = \inf_{\alpha_t} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\alpha^2 \mu^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} - \alpha \beta \frac{\partial V}{\partial P} \right. \\ \left. - \rho \sigma \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \rho \alpha \sigma \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial P} - \alpha \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial P} \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

Rappelons que le prix d'indifférence associé à une utilité exponentielle est défini implicitement de la façon suivante. Tout d'abord, au lieu de raisonner sur V , on fait disparaître la richesse des équations en introduisant la variable U définie par

$$V(P, X, Y, t) = 1 - \exp\{-\lambda(P - U(X, Y, t))\}$$

Ensuite, il faut séparer dans U l'aspect investissement optimal obtenu pour $\Phi = 0$ de l'aspect uniquement issu de la présence de Φ . Le prix d'indifférence π est donc défini par

$$U(X, Y, t) = U_0(X, Y, t) + \pi(X, Y, t)$$

où U_0 désigne la fonction U obtenue dans le cas où $\Phi = 0$. Dans un premier temps, il convient d'écrire (40) non plus sur V mais sur U . Il vient

$$\begin{aligned} 0 = -\lambda \exp\{-\lambda(P - U)\} \times \left[\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial U}{\partial y} \right. \\ \left. - \rho \sigma \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \lambda \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \lambda \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \lambda \rho \sigma \mu \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \right. \\ \left. + \sup_{\alpha_t} \left\{ -\lambda \frac{\alpha^2 \mu^2}{2} + \alpha \beta + \lambda \rho \alpha \sigma \mu \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \alpha \mu^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

La stratégie optimale est égale à

$$\alpha_{\text{opt}} = \underbrace{\frac{\beta}{\lambda\mu^2}}_{\text{investissement optimal}} + \underbrace{\frac{\rho\sigma}{\mu}}_{\text{beta de X / Y}} \frac{\partial U}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{\text{B\&S}} \quad (42)$$

Il reste maintenant à injecter le alpha dans l'EDP dont U est solution. Après développement et simplification, il vient

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \left(b - \beta\rho\frac{\sigma}{\mu} \right) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ & - \rho\sigma\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \lambda(1-\rho^2) \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{\beta^2}{\mu^2} \end{aligned} \quad (43)$$

Il ne reste plus qu'à écrire l'équation sur π qui n'est autre que l'équation précédente avec la même condition aux limites mais dont les termes constants on disparu. La couverture propre à Φ apparaît alors comme

$$\alpha_{\text{opt}} = \rho\frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \pi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial y}}_{\text{B\&S}} \quad (44)$$

et l'EDP dont π est solution apparaît par différence

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} - \left(b - \beta\rho\frac{\sigma}{\mu} + \lambda(1-\rho^2) \sigma^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \pi}{\partial x} \\ & - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} - \rho\sigma\mu \frac{\partial^2 \pi}{\partial x\partial y} - \lambda(1-\rho^2) \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (45)$$

Ce résultat amène plusieurs remarques :

1. L'équation n'est linéaire que pour $\rho = 1$ ou $\rho = -1$,
2. si les termes en x disparaissent, l'équation B&S est retrouvée $\frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = 0$,
3. les termes en y ne dépendent pas de β , ce qui peut être vu comme un analogue de la disparition de la tendance sous la probabilité risque neutre dans B&S.
4. si $\rho = 1$, $X = Y$ i.e. $\sigma = \mu$ et $b = \beta$, nous retrouvons B&S avec les variables dédoublées de manière artificielle.

6.3 Cas particulier : Φ et $\frac{\beta}{\mu}$ ne dépendent pas de Y

6.3.1 Résolution

Il s'agit donc d'une option sur l'actif X que l'on couvre grâce à un proxy Y . L'hypothèse d'indépendance de $\frac{\beta}{\mu}$ vis-à-vis de Y signifie que le ratio de sharpe du proxy ne dépend pas de son niveau.

On se convainc (pas si!) facilement que la combinaison de ces deux hypothèses assure que les **stratégies optimales ainsi que les valeurs d'options deviennent indépendantes de Y .**

L'équation vérifiée par u_0 peut alors se réécrire

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\lambda} \frac{\beta^2}{\mu^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \left(b - \beta \rho \frac{\sigma}{\mu}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \lambda(1 - \rho^2) \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 \\ u_0(X, Y, 0) = 0 \end{cases}$$

dont la solution s'obtient trivialement comme

$$u_0(t) = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\beta^2}{\mu^2} t. \quad (46)$$

A interpréter.

Quant à π , il est alors solution de

$$0 = \frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} - \left(b - \beta \rho \frac{\sigma}{\mu}\right) \frac{\partial \pi}{\partial x} - \lambda(1 - \rho^2) \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)^2 \quad (47)$$

avec la condition terminale $\pi(X, 0) = \Phi(X)$.

Un changement de variables permet d'aller plus loin dans la simplification de l'EDP vérifiée par π . En effet, cherchons π sous la forme

$$\pi = c \log w \quad (48)$$

lorsque $\lambda(1 - \rho^2) \neq 0$. L'équation (47) permet d'obtenir une EDP sur w

$$0 = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(b - \beta \rho \frac{\sigma}{\mu}\right) \frac{\partial w}{\partial x} + c \frac{\sigma^2}{2w} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \lambda(1 - \rho^2) c^2 \frac{\sigma^2}{2w} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

En choisissant $c = \frac{1}{\lambda(1 - \rho^2)}$ (ou encore $u = \frac{1}{\lambda(1 - \rho^2)} \log w$), les termes non linéaires disparaissent de façon spectaculaire et w s'obtient comme solution de l'EDP linéaire

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(b - \beta \rho \frac{\sigma}{\mu}\right) \frac{\partial w}{\partial x} \\ w(X, 0) = e^{\frac{\Phi(X)}{c}} \\ \pi = \frac{1}{\lambda(1 - \rho^2)} \log w \end{cases} \quad (49)$$

avec une couverture égale à

$$\alpha_{\text{opt}} = \rho \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial \pi}{\partial x}.$$

7 Options et illiquidité

7.1 Description du problème

Le marché est modélisé à travers la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dC_t = u_t S_t dt \\ dS_t = \sigma dW_t - k u_t dt \\ d\alpha_t = -u_t dt \\ C_0 = C, S_0 = S, \alpha_0 = \alpha \end{cases} \quad (50)$$

avec C_t le cash détenu, S_t le sous-jacent, $u_t \geq 0$ représentant une vente et $u_t \leq 0$ un achat et $k > 0$ le coefficient d'élasticité. Le programme peut s'écrire

$$V(C, S, \alpha, T) = \begin{cases} \max_{u_t} E[U(C_T)] \\ \alpha_T = 0 \end{cases}$$

Cependant, pour des raisons techniques, le programme est mieux posé sous la forme

$$\begin{cases} \max_{u_t} V_\varepsilon = E[U(C_T - \frac{1}{2\varepsilon}\alpha_T^2)] \\ \varepsilon > 0 \\ \alpha_T = 0 = V(C, S, \alpha, T) \end{cases} \quad (51)$$

7.2 Resolution

7.2.1 Recherche "intuitive" d'une solution

La solution est telle que

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \min_{u_t} \left\{ u_t \left(k \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - S \frac{\partial V}{\partial C} \right) \right\} \quad (52)$$

ou encore⁶

$$0 = k \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - S \frac{\partial V}{\partial C} \quad (53)$$

Cependant, cette équation seule ne permet pas de trouver une solution. En bornant le programme HJB

$$\max_{|u_t| \leq n} V_n = E \left[U \left(C_T - \frac{1}{2\varepsilon} \alpha_T^2 \right) \right] \quad (54)$$

et en notant que $\min_{|u_t| \leq n} (ux) = -n|x|$, (52) devient

$$0 = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial V_n}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial S^2} \right) - \left| k \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - S \frac{\partial V}{\partial C} \right|$$

La solution vérifie alors une égalité d'invariance, une inégalité et des conditions aux limites

$$\begin{cases} 0 = k \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - S \frac{\partial V}{\partial C} \\ 0 \leq \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ V(C, S, \alpha, 0) = V_0 \end{cases} \quad (55)$$

L'invariance reflète le fait qu'à tout moment, un ordre d'achat ou de vente peut être réalisé très rapidement (dynamique importante). Introduisons maintenant \tilde{V} une sur-solution du problème ci-dessus. On a

$$\exists \tilde{V} \text{ vérifiant (55), } n \geq 0 \Rightarrow \tilde{V} \geq V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{V} \geq V \quad (56)$$

⁶On utilise le fait que

$$\inf_{u \in \mathcal{R}} (ux) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Posons pour $t > 0$

$$u_t = \frac{x}{\delta} \mathbf{1}_{[0, \delta]}$$

avec x fixé et δ supposé petit. La dynamique sur $[0, \delta]$ est telle que

$$\begin{cases} \alpha_t = \alpha - \frac{xt}{\delta}, & t \leq \delta \\ S_t = S + \sigma W_t - k \frac{xt}{\delta} \\ C = \frac{x}{\delta} (S + \sigma W_t - k \frac{xt}{\delta}) \\ C_t = C + \frac{xSt}{\delta} + \frac{x}{\delta} \sigma \int_0^s W_s ds - k \frac{x^2}{\delta^2} \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (57)$$

Le programme est

$$V = \max_{u_t} E [V(C_\delta, S_\delta, \alpha_\delta, T - \delta)]$$

On a donc

$$\forall x \in \mathcal{R}, \tilde{V} \geq E \left[V \left(C + xS + x\sigma \int_0^\delta \frac{W_s}{\delta} ds - k \frac{x^2}{2}, S + \sigma W_\delta - kx, \alpha - x, T - \delta \right) \right]$$

et pour δ tendant vers zero

$$\forall x \in \mathcal{R}, \tilde{V} \geq E \left[V \left(C + xS - k \frac{x^2}{2}, S - kx, \alpha - x, T \right) \right]$$

et la solution est

$$\forall x, \forall C, \forall S, \forall \alpha, V(C, S, \alpha, T) \underset{T > 0}{=} V \left(C + xS - k \frac{x^2}{2}, S - kx, \alpha - x, T \right) \quad (58)$$

En calculant la dérivée par rapport à x , nous retrouvons bien l'équation (53). Finalement, ce que nous avons fait revient à l'introduction d'une opération ϕ_x telle que

$$\phi_x \begin{pmatrix} C \\ S \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C + xS - k \frac{x^2}{2} \\ S - kx \\ \alpha - x \end{pmatrix} \quad (59)$$

et la solution peut être aussi écrite comme suit

$$V = V_0 \circ \phi_x, \forall x \in \mathcal{R}, \forall T > 0 \quad (60)$$

ϕ possède une propriété de semi groupe : $\phi_{x+y} = \phi_x \circ \phi_y$.

Étudions maintenant la structure du problème. Pour ce faire, raisonnons sans les termes aléatoires :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{C} = \bar{S} \\ \frac{d}{dt} \bar{S} = -k \\ \frac{d}{dt} \bar{\alpha} = -1 \end{cases}$$

Nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe en $T = 0$. Nous avons

$$V(C, S, \alpha, 0) = \max U \left(C - \frac{1}{2\varepsilon} \alpha^2 \right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \begin{cases} U(C) & \text{si } \alpha = 0 \\ U(-\infty) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

ce qui ne permet pas de trouver une solution. En effet, le fait de pouvoir amener un paquet important d'actions dès le départ entraîne une modification de la condition initiale :

$$\begin{aligned} V(C, S, \alpha, 0^+) &= \max_{x \in \mathcal{R}} \hat{V}_0 \circ \phi_x \\ &= \max_{x \in \mathcal{R}} U \left(C + xS - \frac{kx^2}{2} - \frac{(\alpha - x)^2}{2\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

La solution

$$x = \frac{\alpha + \varepsilon S}{1 + \varepsilon k}$$

est réinjectée

$$\begin{aligned} V(C, S, \alpha, 0^+) &= U \left(C + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon k} \frac{S^2}{2} + \frac{\alpha S}{1 + \varepsilon k} - \frac{k}{2} \frac{\alpha^2}{1 + \varepsilon k} \right) \\ &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} U \left(C + \alpha S - \frac{k\alpha^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Le théorème suivant permet de valider la condition initiale modifiée

7.2.2 Résultat général

Théorème 7 Soient \mathcal{L} et $\tilde{\mathcal{L}}_x$ deux operateurs tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial S^2} \\ \tilde{\mathcal{L}}_x = \phi_{-x} \circ \mathcal{L} \circ \phi_x \end{cases} \quad (61)$$

Alors V est la solution de l'équation HJB suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \min_x \left(\tilde{\mathcal{L}}_x V \right) = 0 \\ V(C, S, \alpha, 0^+) = V_0 \end{cases} \quad (62)$$

Notons que pour $x = 0$, $\tilde{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}$ et $\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \geq 0$.

7.3 Etude de cas particuliers

7.3.1 Changement de variable

Procédons au changement de variables suivant

$$\begin{cases} \Pi_t = C_t + \alpha_t S_t - k \frac{\alpha_t^2}{2} \\ X_t = S_t - k \alpha_t \end{cases} \quad (63)$$

On a donc

$$\begin{cases} d\Pi_t = \alpha_t \sigma dW_t \\ dX_t = \sigma dW_t \end{cases} \quad (64)$$

et le programme s'écrit

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} E \left[U \left(C_T + \alpha_T S_T - k \frac{\alpha_T^2}{2} \right) \right] &= \max_{\alpha} E [U(\Pi_T)] \\ &= U(\Pi) \\ &= U \left(C + \alpha S - k \frac{\alpha^2}{2} \right) \end{aligned}$$

La plus grande utilité est obtenue lorsqu'on peut récupérer le cash initial C et la valeur liquidative $\alpha S - k \frac{\alpha^2}{2}$. Donc la stratégie optimale consiste à vendre tout au départ et de ne plus rien faire entre 0^+ et T . En faisant le calcul pour $E \left[U \left(C - \frac{1}{2\varepsilon} \alpha^2 \right) \right]$, il viendrait

$$dS_t = \frac{\sigma}{1 + \varepsilon k} dW_t$$

Dans ce cas, le processus de vente et d'achat $d\alpha_t$ est, à l'optimal, semblable aux variations :

$$d\alpha_t \approx -\sigma dW_t$$

Ce type de processus réduit la volatilité. On parle souvent de volatilité "scotchée".

7.3.2 Cas lognormal

Dans le cas lognormal, la résolution du problème donne la couverture suivante

$$\frac{(1 - e^{-k\alpha}) S}{k}$$

On retombe bien sur la couverture B&S αS pour α petit.

Note des rédacteurs : nous avons ajouté une bibliographie – bien entendu non exhaustive – qui reprend en grande partie les citations d'un article de ROUGE et EL KAROUI (2000) [13] qui nous semble fondamental au regard de ce cours.

Références

- [1] BARLES, G. AND SONER, H. M. (1998). Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance and Stochastics*, **2**, 4, 369–397.
- [2] BROADIE, M., C. J. AND SONER, H. (1998). Optimal Replication of Contingent Claims Under Portfolio Constraints. *Preprint*.
- [3] CVITANIĆ, J. AND KARATZAS, I. (1993). Hedging contingent claims with constrained portfolios. *Annals Of Applied Probability*, **3**, 3, 652–681.
- [4] CVITANIĆ, J., P. H. AND TOUZI, N. (1999). A closed-form solution to the problem of super-replication under transactions costs. *Finance & Stochastics*.
- [5] DAVIS, M. (1997). Option pricing in Incomplete markets. *Pages 216-227 of : Demtser, M. and Pliska, S. (eds), Mathematics of Derivative Securities*.
- [6] DAVIS, M. H., P. V. C. AND ZARIPHOUPOULOU, T. (1993). European option pricing with transactions costs. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **31**, 2, 470–493.
- [7] EL KAROUI, N. AND QUENEZ, M.-C. (1991). Dynamic programming and pricing of contingent claims in incomplete markets. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **33**, 1, 29–66.
- [8] EL KAROUI, N. AND QUENEZ, M.-C. (1997). Non-linear pricing theory and backward stochastic differential equations. *In : Proceedings CIME Conference, Bressanone*.
- [9] FÖLLMER, H. AND LEUKERT, P. (1999). Efficient hedging : cost versus shortfall risk. *Preprint Humboldt-Universität zu Berlin*.
- [10] FRITTELLI, M. (1998). Introduction to a theory of value coherent with the no arbitrage principle. *to appear in Finance & Stochastics*.
- [11] HODGES, S. D. AND NEUBERGER, A. (1989). Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of Futures Markets*, **8**, 222–239.
- [12] KARATZAS, I. AND KOU, S.-G. (1996). On the pricing of contingent claims under constraints. *Annals Of Applied Probability*, **6**, 2, 321–369.
- [13] ROUGE, R. AND KAROUI, N. E. (April 2000). Pricing via utility maximization and entropy. *Mathematical Finance*, **10**, 2, 259–276.
- [14] SONER, H. M. AND TOUZI, N. (2000). Super replication under gamma constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **39**, 1, 73–96.