

Problèmes d'évolutions linéaires

M. Jazar
Université Libanaise
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

20 décembre 2001

Table des matières

1	Quelques problèmes d'évolution linéaires	5
1.1	Equation de la chaleur	5
1.2	Equation des ondes	9
1.3	Equation de Shrödinger	13
2	Semi groupes et problèmes de Cauchy	15
2.1	C_0 -semi-groupe	15
2.2	Théorèmes de Hille-Yosida	19
2.3	Opérateurs dissipatifs et semi groupes de contractions	21
2.4	Problème de Cauchy abstrait	24
3	Applications aux problèmes d'évolution	29
3.1	Le Laplacien dans un ouvert de \mathbb{R}^N	29
	3.1.1 Théorie L^2:	29
	3.1.2 Théorie C_0:	30
3.2	Equation de la chaleur	31
3.3	Equation des ondes	32
3.4	Equation de Shrödinger	35
	Bibliographie	37

Chapitre 1

Quelques problèmes d'évolution linéaires

Dans ce Chapitre Nous allons voir rapidement les trois problèmes d'évolutions linéaires les plus importants, tous issus de la physique, à savoir l'équation de la chaleur, l'équation des ondes et l'équation de Shrödinger.

Comme références concernant ce chapitre on peut consulter [1,7,9 et 10]

1.1 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière $\Gamma = \delta\Omega$. La condition (1.1(2)) est dite la condition initiale, et la condition (1.1(3)) est la condition au bord.

Solution fondamentale

1.1.1. Définition. Soit L un opérateur différentiel à coefficient constant sur \mathbb{R}^N . On appelle solution fondamentale de l'opérateur L toute distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie

$$LE = \delta \quad \text{la masse de dirac à l'origine.}$$

1.1.2. Proposition. Soit E une solution fondamentale de l'opérateur L , et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Alors la distribution $T_0 = E * S$ est solution de l'équation $LT_0 = S$. De plus, l'ensemble des solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ de l'équation

$$LT = S$$

6 CHAPITRE 1. QUELQUES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION LINÉAIRES

est égal à $\{T = T_0 + U, \text{ avec } U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \text{ t.q. } LU = 0\}$.

Preuve. Si $S \in \mathcal{E}'$, alors $L(E * S) = L(E) * S = \delta * S = S$.

Soit $U = T - E * S$. Il est clair que $LT = S$ si et seulement si $LU = 0$. \square

1.1.3. Proposition. La solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - c\Delta$, où $c > 0$, définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est donnée par la fonction localement intégrable

$$G(x, t) = 1_{]0, +\infty[}(t) \frac{1}{(4c\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ct}\right). \quad (1.2)$$

Preuve. Pour $t > 0$, par le changement de variables $u = x/\sqrt{2ct}$ et par application du théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, t) dx = (2\pi)^{-N/2} \int \exp(-|u|^2/2) du = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx\right)^N = 1.$$

Ceci prouve, en particulier, par Fubini, que $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$. Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N+1})$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G}{\partial t}, \phi \right\rangle &= - \int_0^\infty \int \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) G(x, t) dt dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) G(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G}{\partial t}, \phi \right\rangle &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int \phi(x, t) \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) dt dx \\ &\quad + \int \phi(x, \varepsilon) G(x, \varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Or, si $t > 0$, $G(x, t) = t^{-N/2} G(x/\sqrt{t}, 1)$. Donc, en faisant le changement de variables $x = u\sqrt{\varepsilon}$,

$$\int \phi(x, \varepsilon) G(x, \varepsilon) dx = \int \phi(u\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) G(u, 1) du$$

et donc par convergence dominée, cette expression tend vers $\phi(0) \int G(u, 1) du = \phi(0)$. D'autre part, G est \mathcal{C}^∞ sur le complémentaire de $\mathbb{R}^N \times \{0\}$ et un calcul élémentaire montre que $\partial G/\partial t = c\Delta G$ sur $\mathbb{R}^N \times]0, \infty[$, et donc si $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty \int \phi(x, t) \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) dt dx &= \int_\varepsilon^\infty \int c\phi(x, t) \Delta G(x, t) dt dx \\ &= \int_\varepsilon^\infty \int c\Delta \phi(x, t) G(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on déduit de (1.3) que

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial t}, \phi \right\rangle = c \langle \Delta G, \phi \rangle + \phi(0),$$

i.e. $\partial G/\partial t - c\Delta G = \delta$. \square

1.1.4. Remarques.

1. La fonction G est indépendante des rotations "en espace": elle dépend seulement de $|x|^2$ la distance de x à l'origine.
2. La fonction G est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\})$

Concernant le problème de la chaleur sur \mathbb{R}^N

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.4)$$

on donne le

1.1.5. Théorème. *On suppose que $u_0 \in BC(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, par*

$$u(x, t) := G(x, t) *_x u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t) u_0(y) dy$$

est solution (classique) de (1.4). En plus elle vérifie

1. $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[)$,
2. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = u_0(x_0)$.

Preuve. 1. Comme la fonction G est $BC^\infty(\mathbb{R}^N \times]\delta, \infty[)$, pour tout $\delta > 0$, on voit que u est \mathcal{C}^∞ . De plus, comme la fonction G est solution de l'équation de la chaleur, on voit que, pour $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = [G_t - \Delta G] *_x u_0(x, t) = 0.$$

2. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\epsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ t.q. $|u_0(y) - u_0(x_0)| < \epsilon$ dès que $|y - x_0| < \delta$. Alors, si $|x - x_0| < \delta/2$, on a

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \right| \\ &\leq \int_{B(x_0, \delta)} G(x - y, t) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} G(x - y, t) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \\ &=: I + J \end{aligned}$$

On voit que $I \leq \epsilon \int G(x - y, t) dy = \epsilon$. De plus, si $|x - x_0| \leq \delta/2$ et $|y - x_0| \geq \delta$, alors

$$|y - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|.$$

8CHAPITRE 1. QUELQUES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION LINÉAIRES

Alors $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|$. Donc

$$\begin{aligned}
 J &\leq 2\|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} G(x - y, t) dy \\
 &\leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
 &\leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy \\
 &= \frac{C}{t^{N/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{N-1} dr \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

as $t \rightarrow 0^+$. □

Méthode de l'énergie

On considère maintenant l'équation de la chaleur mono-dimensionnelle:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

1.1.6. Lemma. Estimation de l'énergie. *Soit u une solution C^2 de l'équation de la chaleur (1.5). Alors pour tout $\tau \geq s \geq 0$ la solution u vérifie*

$$\int_0^1 u^2(x, \tau) dx \leq \int_0^1 u^2(x, s) dx.$$

Preuve. Noter d'abord

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} u^2 &= 2uu_t = 2uu_{xx} \\
 &= 2(uu_x)_x - 2u_x^2.
 \end{aligned}$$

Intégrons par rapport à x , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(u^2(x, t) \right)_t dx = u(1, t)u_x(1, t) - u(0, t)u_x(0, t) - \int_0^1 u_x^2(x, t) dx.$$

En utilisant les conditions au bord, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 u^2(x, \tau) dx - \int_0^1 u^2(x, s) dx &= \int_0^1 \int_s^\tau (u^2)_t dt dx \\
 &= -2 \int_0^1 \int_s^\tau u_x^2 dt dx \leq 0.
 \end{aligned}$$

□

On considère à nouveau le problème (1.1), où l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 , et $T > 0$ donné. On note $\Omega_T := \Omega \times]0, T]$, et $\mathcal{C}^{(2,1)}(\Omega_T) := \{u: \Omega_T \rightarrow \mathbb{R} \mid u, D_x u, D_x^2 u, u_t \in \mathcal{C}(\Omega_T)\}$.

La proposition suivante est une généralisation directe de la proposition 1.1.6 au cas général:

1.1.7. Proposition. Estimation de l'énergie. *Soit u une solution \mathcal{C}^2 de l'équation de la chaleur (1.1). Alors pour tout $t \geq s \geq 0$ la solution u vérifie*

$$\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 dx.$$

1.1.8. Remarque. Cette inégalité signifie qu'en norme L^2 , la solution est décroissante.

1.1.9. Théorème (unicité par la méthode d'énergie). *Il existe au plus une solution $u \in \mathcal{C}^{(2,1)}(\Omega)$ du problème*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{dans } \Omega_T \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (1.6)$$

Preuve. 1. Si v est une autre solution, posons $w := u - v$, alors w est solution de

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{dans } \Omega_T \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega_T \end{cases}$$

2. Soit, pour $0 \leq t \leq T$, $E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx$, l'énergie associée à w . Alors

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} w w_t dx = \int_{\Omega} w \Delta w dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve (la décroissance de l'"énergie" voir 1.1.7): $E(t) \leq E(0) = 0$, for all $0 \leq t \leq T$, i.e. $w \equiv 0$ dans Ω_T . \square

1.2 Equation des ondes

L'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. On remarque ici les deux conditions initiales.

Solution Fondamentale

Contrairement à l'opérateur de la chaleur, la solution fondamentale de l'opérateur des ondes est fonction de la parité N , de la dimension de l'espace.

1.2.1. Proposition. $N=1$. *La solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur \mathbb{R}^2 , est la distribution sur \mathbb{R}^2 donnée par la fonction*

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2} 1_{\{x > |t|\}}.$$

1.2.2. Proposition. $N=2$. *La solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sur \mathbb{R}^3 , est la distribution sur \mathbb{R}^3 donnée par la fonction*

$$E_2(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} & \text{si } t > \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Méthode de l'énergie

On considère maintenant une équation d'onde mono-dimensionnelle:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in]0, 1[, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

1.2.3. Lemma. Conservation de l'énergie. *Soit u une solution \mathcal{C}^2 de l'équation des ondes (1.8). Alors pour tout $\tau \geq s \geq 0$ la solution u vérifie*

$$\int_0^1 u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau) dx = \int_0^1 u_t^2(x, s) + u_x^2(x, s) dx.$$

Preuve. Comme pour la preuve de 1.1.6. Soit u une solution de (1.8), alors

$$\begin{aligned} 0 &= (u_{tt} - u_{xx})u_t \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_t^2 + u_x^2) - \frac{d}{dx} (u_x u_t). \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, 1] \times [s, \tau]$, et après changement de l'ordre d'intégration, on obtient

$$\int_0^1 (u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau)) dx - \int_0^1 (u_t^2(x, s) + u_x^2(x, s)) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_s^\tau \frac{d}{dt}(u_t^2 + u_x^2) dt dx \\
&= \int_s^\tau \int_0^1 2 \frac{d}{dx}(u_t u_x) dx dt \\
&= \int_s^\tau 2u_x(1, t)u_t(1, t)dt - \int_s^\tau 2u_x(0, t)u_t(0, t)dt = 0
\end{aligned}$$

en utilisant les conditions aux bords. \square

On revient à l'équation (1.7) et on suppose que l'ouvert Ω est régulier et borné. La proposition suivante est une généralisation directe de la proposition 1.2.3 au cas général:

1.2.4. Proposition. Conservation de l'énergie. *Soit u une solution de l'équation des ondes (1.7). Alors pour tout $\tau \geq s \geq 0$ la solution u vérifie*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) (\tau, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) (s, x) dx.$$

1.2.5. Remarque. Cette égalité signifie que l'énergie est constante.

On revient au problème d'onde non homogène: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec une frontière régulière et on note $\Omega_T := \Omega \times]0, T]$, $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$, où $T > 0$ fixé.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f & \text{dans } \Omega_T \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_T, \\ u_t = u_1 & \text{sur } \Omega \times t = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

1.2.6. Théorème (unicité). *Il existe au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_T})$ solution de (1.9)*

Preuve. Si v est une autre solution, on pose $w := u - v$ et pour $0 \leq t \leq T$

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(x, t) + |\nabla w(x, t)|^2 dx$$

l'énergie associée à w . Alors par un simple calcul,

$$E'(t) = \int_{\Omega} (w_t w_{tt} + \nabla w \cdot \nabla w_t) dx = 0.$$

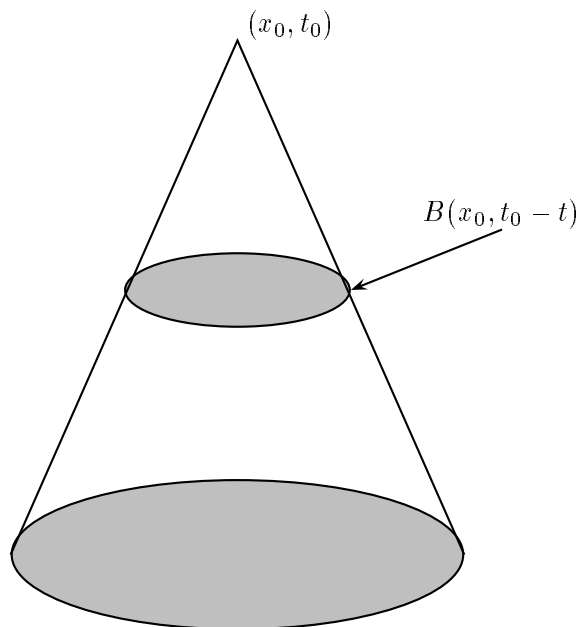
On conclut en remarquant que $E(t) = E(0) = 0$. \square

On va maintenant examiner le domaine de dépendance des solutions de l'équation des ondes dans tout l'espace. Pour cela, on suppose $u \in \mathcal{C}^2$ est solution de

$$u_{tt} = \Delta u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[.$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $t_0 > 0$, et on considère le cône

$$C_{x_0, t_0} := \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$



1.2.7. Théorème (vitesse de propagation finie). *Si $u \equiv u_t \equiv 0$ sur la boule $B(x_0, t_0)$ alors $u \equiv 0$ sur tout le cône C_{x_0, t_0} .*

Preuve. Soit, pour $0 \leq t \leq t_0$

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0 - t)} \left(u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \right) dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{B(x_0, t_0 - t)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \right) d\sigma \\ &= \int_{B(x_0, t_0 - t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx \\ &\quad + \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} u_t^2(x, t) - \frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 \right) d\sigma \\ &= \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} u_t^2(x, t) - \frac{1}{2} |\nabla u(x, t)|^2 \right) d\sigma \end{aligned}$$

Comme (Cauchy-Schwarz)

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |u_t| |\nabla u| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2,$$

on obtient $E'(t) \leq 0$ alors $E(t) \leq E(0) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq t_0$. Alors $u_t \equiv 0$, $\nabla u \equiv 0$ et donc $u \equiv 0$ sur le cône. \square

1.3 Equation de Shrödinger

L'équation de Schrödinger dans \mathbb{R}^N :

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.10)$$

On commence par

1.3.1. Proposition. *Une solution fondamentale de l'opérateur de Schrödinger $\frac{\partial}{\partial t} - ic\Delta$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N+1}$ est donnée par la fonction*

$$E(x, t) = 1_{]0, +\infty[}(t) \exp\left(-i(n-2)\frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{(4c\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ict}\right). \quad (1.11)$$

Comme dans le cas de l'équation de la chaleur on remarque que

1.3.2. Remarques.

1. La fonction E est indépendante des rotations "en espace".
2. La fonction E est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\})$ elle est même analytique pour $t \neq 0$.

Chapitre 2

Semi groupes et problèmes de Cauchy

Comment résoudre un problème de Cauchy associé à une équation différentielle (EDO ou EDO) de la forme

$$\begin{cases} u' = Au & t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si A est un nombre ou bien une matrice, alors la solution est sous la forme

$$u(t) = e^{tA} u_0.$$

La forme de cette solution dépend certainement de la possibilité de définir la fonction exponentielle: Dans les deux cas ci dessus, même si A est un opérateur linéaire borné, e^{tA} est définie par une série:

$$e^A := \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}.$$

Mais quel sens donner à e^{tA} si A est un opérateur linéaire non borné? Est ce que tout opérateur admet une exponentielle? On va essayer dans ce chapitre de répondre à ces questions.

Comme références concernant ce chapitre on peut consulter [1,2,4,5,6,8 et 10]

Dans tout ce chapitre, et sauf mention du contraire, X est un espace de Banach, et A un opérateur linéaire non borné.

2.1 C_0 -semi-groupe

2.1.1. Définition. Une famille $(G(t))_{t \geq 0}$, d'opérateurs linéaires bornés sur X , est dite **semi-groupe fortement continue** ou bien **C_0 -semi-groupe**, si elle vérifie:

1. $G(t + s) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$, $t, s \geq 0$,
2. $G(0) = I$,
3. Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{aligned} [0, \infty[&\longrightarrow X \\ t &\longmapsto G(t)x \end{aligned}$$

est continue.

2.1.2. Remarques:

1. La première propriété est la propriété exponentielle.
2. En utilisant 1, il est facile de montrer que la condition 3 est équivalente à la continuité en zéro. D'où l'appellation C_0 -semi-groupe.
3. Si A est un opérateur borné, on a alors l'uniforme continuité: La fonction

$$\begin{aligned} [0, \infty[&\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\longmapsto G(t) \end{aligned}$$

est continue. On peut même prouver qu'il y a équivalence (en appliquant le théorème de graph fermé et le théorème 1.8).

2.1.3. Lemme. *Soit $w : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée sur tout interval borné et sous-additive (i.e. $w(t + s) \leq w(t) + w(s)$). Alors*

$$\inf_{t > 0} \frac{w(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t}.$$

Preuve. Notons d'abord que les deux membres de l'égalité peuvent être $-\infty$. Soit $w_0 := \inf_{t > 0} \frac{w(t)}{t}$ et soit $\gamma > w_0$. Il existe alors $t_0 > 0$ avec $w(t_0)/t_0 < \gamma$. For $t \geq 0$, ils existent $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < t_0$, tels que $w(t)/t \leq (nw(t_0) + w(r))/t$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, $n/t \rightarrow 1/t_0$ et $w(r)/t \leq \sup_{s \in [0, t_0[} w(s)/t$, alors

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} \leq \frac{w(t_0)}{t_0} \leq \gamma.$$

□

2.1.4. Proposition. *Soit $(G(t))$ un C_0 -semi-groupe. Alors la limite*

$$w_0 := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|G(t)\|}{t}$$

*existe (ou bien $-\infty$). En addition pour tout $\gamma > w_0$, il existe une constante $M_\gamma > 0$ tel que $\|G(t)\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}$. Ce nombre, w_0 , est appelé le **type** du semi-groupe.*

Preuve. De la propriété exponentielle, on voit que la fonction $\log \|G(t)\|$ est sous-additive. De plus, comme $t \mapsto G(t)x$ est fortement continue, elle est

bornée sur tout intervalle bornée, et par le théorème de Banach-Steinhaus, $\|G(t)\|$ est bornée sur tout intervalle. Par le lemme précédent, w_0 existe et est l'inf. Pour tout $\gamma > w_0$, il existe t_0 tel que $\log \|G(t)\|/t < \gamma$ pour tout $t \geq t_0$, i.e. $\|G(t)\| \leq e^{\gamma t}$. Prendre alors

$$M_\gamma := \max(1, \sup_{t \in [0, t_0]} \|G(t)\| e^{-\gamma t}).$$

□

2.1.5. Exemple. (semi-groupe Shift) Soit $X = L^2(0, 1)$ et soit

$$[G(t)u](x) = \begin{cases} u(x+t) & \text{si } x+t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $G(t) = 0$, pour $t \geq 1$. Le type est $-\infty$.

2.1.6. Définition. Le générateur $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ d'un C_0 -semi-groupe $(G(t))$ est l'opérateur

$$Ax := \lim_{t \downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t}$$

définie pour tout x dans son domain

$$D(A) := \{x \in X \mid \text{la limite existe}\}.$$

2.1.7. Remarques:

1. Ax n'est autre que la dérivée en zéro de la fonction continue $t \mapsto G(t)x$.
2. Cette définition est valable pour les cas où A est borné.
3. Il n'est pas clair que $D(A)$ ne soit pas trivial. On va voir plus tard qu'en fait c'est un sous-espace dense de X .

2.1.8. Lemme. Soit $(A, D(A))$ le générateur d'un C_0 -semi-groupe $(G(t))$. Alors

1. $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ is a linear operator.
2. Pour $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x \, ds = G(t)x.$$

3. Si $x \in D(A)$ et $t > 0$, alors $G(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} (G(t)x) = AG(t)x = G(t)Ax.$$

4. Pour tout $x \in X$ and tout $t > 0$, $\int_0^t G(s)x \, ds \in D(A)$ et

$$A \left(\int_0^t G(s)x \, ds \right) = G(t)x - x.$$

5. Pour tout $x \in D(A)$ et tous $s, t > 0$,

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AG(\tau)x d\tau.$$

Preuve. 1. est trivial.

2. Calcul direct en utilisant la continuité de $t \mapsto G(t)x$.

3. Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$, on a

$$\frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} = \frac{G(h) - I}{h}G(t)x = G(t)\frac{G(h)x - x}{h},$$

et

$$\frac{G(t)x - G(t-h)x}{h} = G(t-h)\frac{G(h)x - x}{h}.$$

Il suffit de faire tendre $h \rightarrow 0^+$.

4. Soit $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} \int_0^t G(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (G(s+h) - G(s))x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h G(s)x ds. \end{aligned}$$

En utilisant 2, la limite est $G(t)x - x$.

5. Direct. □

2.1.9. Théorème. *Le générateur d'un C_0 -semi-groupe est un opérateur fermé densément défini qui détermine le semi-groupe d'une façon unique.*

Preuve. D'après 2.8.2, $x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h G(s)x ds$, ce qui prouve la densité du domaine. Soit maintenant $(x_n) \subset D(A)$, $x_n \rightarrow x$ et $Ax_n \rightarrow y$. Alors, par 2.1.8.5, $G(h)x_n - x_n = \int_0^h G(s)Ax_n ds$. Par passage à la limite on obtient

$$G(h)x - x = \int_0^h G(s)y ds.$$

On divise par h , puis faire tendre $h \rightarrow 0^+$. □

2.1.10. Exemples (Shift semigroup).

1. Soient $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ et $(G(t)f)(x) = f(x+t)$, pour $t, x \in \mathbb{R}$. $(G(t))$ définit un C_0 -(semi)-groupe. Le générateur est

$$Af := f',$$

avec domaine

$$D(A) := \{f \in L^p(\mathbb{R}) \mid f \text{ absolument continue et } f' \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

2. Soient $X = BUC(\mathbb{R})$, et $(G(t)f)(x) = f(x+t)$, pour $t, x \in \mathbb{R}$. $(G(t))$ définit un C_0 -(semi)-groupe. Le générateur est

$$Af := f',$$

avec domaine

$$D(A) := \{f \in BUC\mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in BUC\mathbb{R}\}.$$

2.2 Théorèmes de Hille-Yosida

Le problème fondamentale de la théorie de semi-groupe est la caractérisation des générateurs de semi-groupe.

2.2.1. Définition. Un semi-groupe $(G(t))$ est dit de contractions si pour $t \geq 0$, $\|G(t)\| \leq 1$.

2.2.2. Lemma. Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé densément définie. On suppose qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M > 0$ tels que $[w, \infty[\subset \rho(A)$ et $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M$ pour tout $\lambda \geq w$. Alors:

- (i) pour tout $x \in X$, $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.
- (ii) pour tout $x \in D(A)$, $\lambda AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax \rightarrow Ax$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Preuve. Si $y \in D(A)$, alors $\lambda R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)Ay + y$. Cette expression converge car $\|R(\lambda, A)Ay\| \leq \frac{M}{\lambda}$, et par densité du domaine on obtient le premier point. Le deuxième point est une conséquence du premier point et par le fait que A est fermé. \square

Ce lemme suggère une approximation bornée A_n de A .

2.2.3. Théorème de Hille-Yosida. (Cas de contraction).

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $(A, D(A))$ engendrent un C_0 -semi-groupe de contractions.
- (ii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda > 0$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1.$$

- (iii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Preuve. Il suffit de montrer (ii) \implies (i).

Shéma de la preuve: On pose $A_n := nR(n, A) = n^2 - R(n, A) - nI$ et $T_n(t) := \exp(tA_n)$ et on démontre les points suivants:

- 1- $T(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x$ existe pour tout $x \in X$.
- 2- $(T(t))$ est un C_0 -semi-groupe.
- 3- $(A, D(A))$ est le générateur.

2.2.4. Définition. L'opérateur $(A, D(A))$ est dit générateur d'un C_0 -groupe si et seulement si A et $-A$ engendrent des C_0 -semi-groupes $(G_1(t))_{t \geq 0}$ et $(G_2(t))_{t \geq 0}$ respectivement. Le groupe $(G(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est alors défini par

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) & \text{si } t \geq 0 \\ G_2(-t) & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

On obtient alors:

2.2.5. Corollaire. (Cas de groupe d'isométries)

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $(A, D(A))$ engendre un C_0 -groupe d'isométries.
(ii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1.$$

- (iii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}.$$

2.2.6. Théorème de Hille-Yosida. (Cas général)

Soient $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $(A, D(A))$ engendre un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ vérifiant pour tout $t \geq 0$

$$\|G(t)\| \leq Me^{wt}$$

- (ii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda > w$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|[(\lambda - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M.$$

- (iii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > w$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}.$$

2.2.7. Théorème de Hille-Yosida. (Cas de groupes)

Soient $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $(A, D(A))$ engendre un C_0 -groupe $(G(t))_{t \in \mathbb{R}}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|G(t)\| \leq Me^{w|t|}$$

- (ii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > w$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|[(|\lambda| - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M.$$

- (iii) $(A, D(A))$ est fermé, densément définie, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}\lambda| > w$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{1}{(|\operatorname{Re}\lambda| - w)^n}.$$

2.3 Opérateurs dissipatifs et semi groupes de contractions

Vu l'importance de la classe des générateurs des semi-groupes de contractions, on va essayer de les caractériser.

2.3.1. Définition. Un opérateur linéaire $(A, D(A))$ sur un espace de Banach est **dissipatif** si pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$ on a $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|$.

Voici quelques propriétés de ces opérateurs

2.3.2. Propriétés. Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif. Alors

- (i) Pour tout $\lambda > 0$, $\lambda - A$ est injectif et

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|,$$

pour tout $z \in \operatorname{Im}(\lambda - A) = (\lambda - A)D(A)$.

- (ii) $\lambda - A$ est surjectif pour un certain λ si et seulement s'il est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas on a $]0, \infty[\subset \rho(A)$.
- (iii) A est fermé si et seulement si $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ est fermé pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$.
- (iv) Si $\operatorname{Im}(A) \subset \overline{D(A)}$, en particulier si A est densément défini, alors A est fermable. Sa fermeture \overline{A} est aussi dissipative et vérifie $\operatorname{Im}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\operatorname{Im}(\lambda - A)}$ pour tout $\lambda > 0$.

Preuve. (i) Direct.

(ii) Supposons que $(\mu - A)$ est surjectif pour un certain $\mu > 0$. D'après (i), $\mu \in \rho(A)$ et $\|R(\mu, A)\| \leq \frac{1}{\mu}$. Par le développement du résolvant en série, cela montre que $]0, 2\mu[\subset \rho(A)$, et la dissipativité de A implique que $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, pour tout $0 < \lambda < 2\mu$. De proche en proche on montre le point.

(iii) A est fermé si et seulement si $\lambda - A$ est fermé pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$. Ceci est équivalent à $R(\lambda, A): \operatorname{Im}(\lambda - A) \rightarrow D(A)$ est fermé, donc si et seulement si son domaine, i.e. $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ est fermé.

(iv) Soit (x_n) une suite de $D(A)$ tel que $x_n \rightarrow 0$ et $Ax_n \rightarrow y$. Pour tout $w \in D(A)$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|.$$

Faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient $\| -\lambda y + (\lambda - A)w \geq \lambda \|w\|$, et donc $\| -y + w - \frac{1}{\lambda}Aw \| \geq \|w\|$. Faisant $\lambda \rightarrow \infty$, $\| -y + w \| \geq \|w\|$, on choisit $w \in D(A)$ arbitrairement proche de $y \in \overline{Im(A)}$, on obtient $y = 0$. Le reste peut être obtenu par calcul direct. \square

Il est clair que tout opérateur qui vérifie l'inégalité de Hille-Yosida est dissipatif. Le théorème suivant est une sorte de caractérisation:

2.3.3. Théorème. (Lumer-Phillips)

Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif densément défini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) *La fermeture \overline{A} de A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.*

(ii) *$Im(\lambda - A)$ est dense dans X pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$.*

Preuve. (i) \implies (ii) Par le théorème 2.2.3, pour tout $\lambda > 0$, $Im(\lambda - \overline{A}) = X$. On conclut en utilisant par 2.3.2(iv).

(ii) \implies (i) Par le même argument, la densité de $Im(\lambda - A)$ implique que $(\lambda - \overline{A})$ est surjective. Le point 2.3.2(ii) montre que $]0, \infty[\subset \rho(\overline{A})$, et la dissipativité de A implique l'estimation

$$\|R(\lambda, \overline{A})\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

pour tout $\lambda > 0$. Le théorème 2.2.3 termine la preuve. \square

Ce théorème justifie la définition suivante:

2.3.4. Définition. Un opérateur dissipatif $(A, D(A))$ tel que $Im(\lambda - A)D(A) = X$ pour un certain (donc pour tout) $\lambda > 0$ est dit m-dissipatif.

Avec cette définition le théorème de Lumer-Phillips dit que A est m-dissipatif si et seulement, si A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.

Le résultat suivant donne une condition "simple" pour qu'un opérateur engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.

2.3.4. Corollaire. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur densément défini. Si A et A^* sont dissipatifs, alors la fermeture \overline{A} de A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.*

Preuve. Par le théorème précédent, il suffit de montrer que $Im(\lambda - A)$ est dense dans X . Supposons le contraire, alors par le théorème de Hahn-Banach il existe $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in D(A)$, $\langle (I - A)x, x^* \rangle = 0$. Alors $x^* \in D(A^*)$ et $\langle x, (I - A^*)x^* \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$. Par densité de $D(A)$, on obtient $(I - A^*)x^* = 0$. Appliquant 2.3.2(i) on aboutit à une contradiction. \square

Le cas hilbertien est très intéressant, d'autant plus que l'on peut donner une version "plus pratique" du théorème de Lumer-Phillips. On rappelle d'abord

2.3.6. Proposition. *Soit H un espace de Hilbert. Alors $(A, D(A))$ est dissipatif si et seulement si $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$.*

Preuve. Si A est dissipatif, on a, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D(A)$

$$-2\lambda \langle Ax, x \rangle + \lambda^2 \|Ax\|^2 = \|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 \geq 0.$$

En divisant par λ , puis $\lambda \rightarrow 0$, on obtient $\langle Ax, x \rangle \leq 0$, pour tout $x \in D(A)$. Inversement, pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$

$$\|x - \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2 = -2\lambda \langle Ax, x \rangle + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq \|x\|^2$$

ce qui montre que A est dissipatif. \square

2.3.7. Corollaire. (Lumer-Phillips, cas hilbertien)

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire densément défini dans un espace de Hilbert H . Alors A est m -dissipatif si et seulement, si A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.

2.3.8. Exemple. (Semi-groupe shift) Soient $H = L^2(0, 1)$, et $Af = f'$ avec domaine $D(A) = \{f \in H^1(0, 1) \mid u(1) = 0\}$. Il est clair que $D(A)$ est dense et que le spectre est vide. De plus, on a pour tout $u \in D(A)$, $\langle u, Au \rangle = -\frac{1}{2}u(0)^2 \leq 0$. Alors A engendre un semi-groupe de contractions (celui de 1.5)

2.3.9. Définition. Soit A un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert H , de domaine dense. On dit que A est auto-adjoint (respectivement anti-adjoint) si $A^* = A$ (respectivement si $A^* = -A$).

2.3.10. Proposition. *Soit A un opérateur auto-adjoint négatif dans un espace de Hilbert H . Alors A est m -dissipatif.*

Preuve. Comme A est négatif, A (et donc A^*) est dissipatif (2.3.6.). En utilisant 2.3.4, il suffit de voir que $G(A)$ est fermé, ce qui est vraie car $G(A) = G(A^*)$. \square

2.3.11. Corollaire. *Soit A un opérateur linéaire densément défini dans un espace de Hilbert H tel que $G(A) \subset G(A^*)$. Alors A est m -dissipatif si et seulement si A est auto-adjoint négatif*

Preuve. En appliquant la dernière proposition, il suffit de montrer que si A est m -dissipatif alors A est auto-adjoint. Soit $(x, y) \in G(A^*)$ et soit $z := x - A^*x = x - y$. Puisque A est m -dissipatif, il existe $v \in D(A)$ tel que $z = v - Av$ et puisque $G(A) \subset G(A^*)$, on a $v \in D(A^*)$ et $z = v - A^*v$. Donc $(I - A^*)(v - u) = 0$. Or A^* est dissipatif, par 2.3.(i), $v - u = 0$. $A = A^*$. \square

On termine cette section par un résultat très utile pour la caractérisation des générateurs de groupes unitaires.

2.3.12. Théorème de Stone. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur densément défini sur un espace de Hilbert H . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i) A engendre un groupe unitaire.
- (ii) A est anti-adjoint, (i.e. $A^* = -A$)
- (iii) A et $-A$ sont m -dissipatifs.

Preuve. (i) \implies (ii) 1. Si A engendre un groupe unitaire, alors $G^*(t) = G^{-1}(t) = G(-t)$.

2. $-A \subset A^*$. En effet, soient $x, y \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} \langle -Ax, y \rangle &= -\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{G(t)x - x}{t}, y \right\rangle = -\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle x, \frac{G^*(t)y - y}{t} \right\rangle \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle x, \frac{G^{-1}(t)y - y}{t} \right\rangle \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle x, \frac{G(-t)y - y}{t} \right\rangle = \langle x, Ay \rangle, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $x \in D(A^*)$ et $\langle -Ax, y \rangle = \langle A^*x, y \rangle$.

3. $-A = A^*$. Soient $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$ on a

$$\begin{aligned} \langle x, A^*y \rangle &= \langle Ax, y \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{G(t)x - x}{t}, y \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle x, \frac{G^*(t)y - y}{t} \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle x, \frac{G^{-1}(t)y - y}{t} \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle x, \frac{G(-t)y - y}{t} \right\rangle = \langle x, Ay \rangle, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $y \in D(A)$ et donc $-A = A^*$.

(ii) \implies (iii) Pour $x \in D(A)$, on a $\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^*x \rangle = -\langle x, Ax \rangle$. Donc $\langle Ax, x \rangle = 0$. Ceci prouve que A et $-A$ sont dissipatifs. On conclut comme pour la proposition 2.3.11.

(iii) \implies (i) Direct. □

2.4 Problème de Cauchy abstrait

On revient au point de départ: résoudre le problème de Cauchy abstrait (i.e. à valeurs dans un espace de Banach)

$$(PCA_f) \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & t \in [0, T] \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

où t représente le temps, $T > 0$ fixé, $f: [0, T] \mapsto X$ continue donné, u est une fonction à valeurs dans X , $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire, et $u_0 \in X$ la donnée initiale.

Dans cette section on suppose que $(A, D(A))$ engendre le C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$.

2.4.1. Définition. Une fonction $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ est dite **solution classique** de (PCA_f) si u est continuellement différentiable, i.e. $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; X) \cap \mathcal{C}([0, T]; D(A))$ (ici $D(A)$ est considéré comme espace de Banach muni de la graph de norme), et (PCA_f) est vérifié ($u_0 \in D(A)$).

2.4.2. Proposition.

1. Pour tout $u_0 \in D(A)$, la fonction

$$u: t \mapsto u(t) := G(t)u_0$$

est l'unique solution classique de (PCA_0) .

2. Si u est solution classique de (PCA_f) . Alors u vérifie (formule de la variation de la constante):

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds. \quad (2.2)$$

Preuve. Le premier point est évident. Soit maintenant $g(s) := G(t-s)u(s)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AG(t-s)u(s) + G(t-s)u'(s) \\ &= -AG(t-s)u(s) + G(t-s)(Au(s) + f(s)) = G(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Alors

$$g(t) - g(0) = u(t) - G(t)u_0 = \int_0^t G(t-s)f(s) ds.$$

□

On remarque que la solution classique existe si et seulement si la donnée initiale est dans $D(A)$, ce qui est restrictif, mais le second membre de l'égalité précédente a un sens sous des hypothèses plus faible. On va modifier le concept de "solution".

2.4.3. Définition. Si $u_0 \in X$ et $f \in L^1([0, T]; X)$. Alors la fonction donnée par (2.2) est appelée **solution mild** de (PCA_f) .

2.4.4. Théorème. Si $u_0 \in D(A)$, $f \in \mathcal{C}([0, T]; X)$ et que ou bien $f \in W^{1,1}([0, T]; X)$ ou bien $f \in L^1([0, T]; D(A))$. Alors la solution mild de (ACP_f) est solution classique.

Preuve. On pose $v(t) := \int_0^t G(t-s)f(s) ds$. Il suffit de montrer que $v \in \mathcal{C}^1([0, T], X) \cap \mathcal{C}([0, T], D(A))$ et que $v'(t) = Av + f$. On note d'abord

$$\frac{G(h) - I}{h}v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(t+h-s)f(s) ds.$$

Comme f est continue et le semi groupe est fortement continu, le dernier membre de cette égalité tends vers $-f(t)$ lorsque $h \rightarrow 0^+$. Ainsi on voit que

$Av(t)$ existe si et seulement si v est \mathcal{C}^1 , donc $v \in \mathcal{C}^1([0, T], X)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}([0, T], D(A))$ et dans ce cas $v' = Av + f$. Si $f \in L^1([0, T], D(A))$, alors il est clair que $v \in \mathcal{C}([0, T], D(A))$. Si $f \in W^{1,1}([0, T], X)$, on écrit alors

$$v(t) = \int_0^t G(s)f(t-s) ds,$$

ce qui donne

$$v'(t) = G(t)f(0) + \int_0^t G(s)f'(t-s) ds.$$

Donc $v \in \mathcal{C}^1([0, T], X)$. □

Nous allons terminer ce chapitre par un résultat de régularité dans le cas auto-adjoint négatif.

2.4.5. Théorème. *Soient H un espace de Hilbert réel et A un opérateur auto-adjoint négatif et $(G(t))$ le semi-groupe engendré par A . Alors, pour tout $u_0 \in H$, $u(t) := G(t)x$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty[, H) \cap C(]0, \infty[, D(A)) \cap C^1(]0, \infty[, H), \\ u'(t) = Au(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad \text{pour tout } t > 0,$$

De plus, pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \|Au(t)\| &\leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|u_0\|, \\ - \langle Au(t), u(t) \rangle &\leq \frac{1}{2t}\|u_0\|^2, \end{aligned}$$

et si $u_0 \in D(A)$, alors

$$\|Au(t)\|^2 \leq -\frac{1}{2t} \langle Au_0, u_0 \rangle.$$

Preuve. 1. Pour tout $\lambda > 0$, on pose $J_\lambda := (\lambda - A)^{-1}$ et $A_\lambda := AJ_\lambda = \lambda J_\lambda - I$. Alors $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ et pour tout $x \in D(A)$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda x - Ax = 0$ et A_λ est auto-adjoint négatif.

2. On pose $u_\lambda(t) := e^{A_\lambda t}$. Les fonctions $\|u_\lambda(t)\|$ et $\|u'_\lambda(t)\|$ sont décroissantes. De plus

$$\begin{aligned} \left(\|u_\lambda(t)\|^2\right)' &= 2 \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle, \\ \left(\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle\right)' &= 2 \langle A_\lambda u_\lambda(t), u'_\lambda(t) \rangle = 2\|u'_\lambda(t)\|^2, \end{aligned}$$

On déduit que $-\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle$ est décroissante. En intégrant entre 0 et t ,

$$-t \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle \leq -\int_0^t \langle A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s) \rangle ds = 2\|x\|^2,$$

$$\begin{aligned}
2t\|u'_\lambda(t)\|^2 &\leq 2\int_0^t \|u'_\lambda(s)\|^2 ds = -\langle A_\lambda x, x \rangle + \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle \\
&\leq -\langle A_\lambda x, x \rangle,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
t^2\|u'_\lambda(t)\|^2 &\leq 2\int_0^t s\|u'_\lambda(s)\|^2 ds = \int_0^t s(\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) \rangle)' ds \\
&\leq -\int_0^t \langle A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s) \rangle ds.
\end{aligned}$$

D'où $\|2t^2\|u'_\lambda(t)\|^2 \leq \|x\|^2$. On obtient le résultat par passage à la limite.

3. Reste à montrer l'unicité. Pour cela, on considère $t > 0$ et $0 < \varepsilon < t$. De 2.4.2.2, on déduit que $u(t) = G(t - \varepsilon)u(\varepsilon)$, alors

$$\|u(t) - G(t)x\| \leq \|u(\varepsilon) - x\| + \|G(\varepsilon)x - x\| \longrightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Donc $u(t) = G(t)x$, pour tout $t \geq 0$. \square

2.4.6. Remarques.

1. Ce théorème dit que le semi-groupe est régularisant: quelque soit la donnée initiale u_0 , et dès que $t > 0$, $G(t)u_0 \in D(A)$.
2. Ce qui n'est pas le cas lorsque l'opérateur engendre un groupe unitaire: il est clair que dans ce cas, si $u_0 \notin D(A)$, alors $u(t) \notin D(A)$ pour tout t .

Chapitre 3

Applications aux problèmes d'évolution

Dans ce chapitre nous allons appliquer les résultats du deuxième chapitre aux problèmes d'évolutions déjà rencontré.

Comme références concernant ce chapitre on peut consulter [1,3,4,5 et 10]

3.1 Le Laplacien dans un ouvert de \mathbb{R}^N

3.1.1 Théorie L^2 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $X = L^2(\Omega)$ considéré comme espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur A sur X par

$$D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

$$Au = \Delta u, \quad u \in D(A).$$

Alors on a

3.1.1. Proposition. $(A, D(A))$ est m -dissipatif de domaine dense. De plus A est auto-adjoint négatif.

Preuve. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, $D(A)$ est dense dans X . Soit $u \in D(A) \subset H_0^1(\Omega)$, par la formule de Green, on a

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$$

et donc A est dissipatif.

En utilisant le Lemme de Lax-Milgram, pour tout $f \in X$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx = \int f v.$$

Ce qui donne (par Green) qu'au sens des distributions

$$u - \Delta u = f.$$

On voit donc que $(u \in H_0^1) \Delta u = u - f \in L^2$, i.e. $u \in D(A)$. A est m-dissipatif.

A nouveau, par la formule de Green, pour tout $u, v \in D(A)$ on a $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ et donc $G(A) \subset G(A^*)$. Par 2.3.11, A est auto-adjoint. \square

3.1.2. Corollaire. A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions.

3.1.3. Remarque. Si la frontière de Ω est bornée et de classe C^2 , alors $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec normes équivalentes (voir [3, théorème IX 25])

3.1.2 Théorie C_0 :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $Y = L^\infty(\Omega)$. On définit l'opérateur B sur Y par

$$D(B) := \{u \in H_0^1(\Omega) \cap Y, \Delta u \in L^\infty(\Omega)\},$$

$$Bu = \Delta u, \quad u \in D(B).$$

Alors on a

3.1.4. Proposition. $(B, D(B))$ est m-dissipatif dans $L^\infty(\Omega)$.

Preuve. 1- B est dissipatif: Soient $\lambda > 0$, $f \in Y$, $M := \|f\|_{L^\infty}$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution de $u - \lambda \Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. $L^2 \subset \mathcal{D}'$ et donc $(u - M) - \lambda \Delta(u - M) = f - M$ dans L^2 . Posons $v := (u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$, en remarquant que $\nabla v = \chi_{\{|u|>M\}} \nabla u$, on a (Green)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v^2 + \lambda |\nabla v|^2) dx &= \int_{\Omega} v^2 dx + \lambda \int_{\{|u|>M\}} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} v^2 dx + \lambda \int_{\{|u|>M\}} |\nabla v|^2 dx \\ &= \int_{\{|u|>M\}} (f - M)v dx \leq 0. \end{aligned}$$

En particulier $\int v^2 \leq 0$, donc $v \equiv 0$, i.e. $u \leq M$ presque partout sur Ω . De même on montre que $u \geq -M$ p.p. sur Ω . D'où $f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq M$, en d'autres termes $\|(I - \lambda B)u\|_\infty \geq \|u\|_\infty$.

2- B est m-dissipatif: Si on reprend le premier point avec $f \in L^\infty \subset L^2$ et $\lambda = 1$. D'après la sous section 3.1.1 il existe $u \in D(A)$ solution de $u - \Delta u = f$ dans L^2 , mais on a montré que $u \in L^\infty$ et donc $u \in D(B)$ et $u - Bu = f$. \square

3.1.5. Lemme. (voir [7, Théorème 8.30]) Si la frontière de Ω est Lipschitzienne, on a $D(B) \subset C_0(\Omega) := \{u \in C(\overline{\Omega}), u = 0, \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Ce lemme justifie les changements:

Soit $Z := C_0(\Omega)$, et on définit l'opérateur

$$D(C) := \{u \in Z \cap H_0^1(\Omega), \Delta u \in Z\},$$

$$Cu = \Delta u, \quad u \in D(C).$$

3.1.6. Proposition. *On suppose que la frontière de Ω est Lipschitzienne, alors $(C, D(C))$ est m-dissipatif de domaine dense.*

Preuve. $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(C)$ est dense dans Z , donc $D(C)$ est dense dans Z . D'autre part $Z \subset X$ et $G(C) \subset G(B)$. B étant dissipatif, C l'est aussi. Comme B est m-dissipatif, pour tout $f \in L^\infty$, il existe $u \in D(B)$ tel que $u - \Delta u = f$. Par le lemme 3.1.4, $u \in Z$, i.e. C est m-dissipatif. \square

3.2 Equation de la chaleur

On considère l'opérateur A du 3.1.1 et on note $(G(t))$ le semi-groupe engendré par A dans X .

3.2.1. Lemme. *L'injection $D(A)$ dans $H_0^1(\Omega)$ est continue.*

Preuve. Par la formule de Green on

$$\|u\|_{H^1}^2 = (\|u\|_{L^2})^2 + (\|\nabla u\|_{L^2})^2 = (\|u\|_{L^2})^2 - \langle Au, u \rangle.$$

Donc $\|u\|_{H^1}^2 = (\|u\|_{L^2})^2 + |\langle Au, u \rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|u\|_{D(B)}$. \square

En appliquant la proposition 3.1.1. et le théorème 2.4.5, on obtient la proposition suivante:

3.2.2. Proposition. *Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. Alors $u(t) := G(t)u_0$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty[, L^2) \cap C^1(]0, \infty[, L^2), \Delta u \in C(]0, \infty[, L^2), \\ u'(t) = \Delta u(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad \text{pour tout } t > 0,$$

De plus, on a $u \in C(]0, \infty[, H_0^1)$,

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq \frac{1}{t\sqrt{2}} \|u_0\|, \quad t > 0$$

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|u_0\|_{L^2}, \quad t > 0.$$

et si $u_0 \in H_0^1$, alors $u \in C([0, \infty[, H_0^1)$ et pour $t > 0$

$$\|\Delta u\| \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|\nabla u_0\|_{L^2}.$$

On peut préciser la régularité de u si la donnée initiale l'est:

3.2.3. Proposition. *Si de plus $u_0 \in H_0^1$, alors $u \in C([0, \infty[, H_0^1)$ et pour tout $t > 0$*

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|\nabla u_0\|_{L^2}; \quad (3.1)$$

Si de plus $\Delta u_0 \in L^2$ (i.e. $u_0 \in D(A)$), on a $u \in C^1([0, \infty[, L^2)$ et $\Delta u \in C([0, \infty[, L^2)$ et l'égalité $u_t = \Delta u$ est vérifiée pour $t \geq 0$.

Preuve. Si $u_0 \in D(A)$ alors c'est une conséquence immédiate de 2.4.5.

Par densité de $D(A)$ dans H_0^1 , l'inégalité (1.1) est vérifiée dans H_0^1 . Il reste à montrer que $u \in C([0, \infty[, H_0^1)$, i.e. reste à montrer que $u(t) \rightarrow u_0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. On reprend les notations de la démonstration du théorème 2.4.5. On passe à la limite dans (2.3) lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\int_0^1 \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2,$$

$$\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla u_0\|^2 = 2 \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds.$$

Il en résulte que $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \rightarrow \|\nabla u_0\|_{L^2}^2$. □

3.2.4. Remarque. Si la frontière de Ω est bornée et de classe C^2 , alors $D(A) = H^2 \cap H_0^1$. Donc, si $u_0 \in H^2 \cap H_0^1$, on a $u \in C([0, \infty[, H^2)$.

3.3 Equation des ondes

Dans cette section nous allons traiter l'équation des ondes

$$u'' = \Delta u.$$

Plus généralement on considère l'équation

$$u'' = Au.$$

Afin de transformer ce problème en un problème de Cauchy nous allons poser: $U := (u, u')$,

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix},$$

ainsi le problème du second ordre est équivalent au

$$U' = \mathcal{A}U.$$

On revient à l'équation des ondes. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ considéré comme espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur

$$D(A) := \{(u, v) \in X, \Delta u \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)\},$$

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}.$$

3.3.1. Proposition. $(A, D(A))$ est anti-adjoint, en particulier A engendre un groupe unitaire.

Preuve. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, ce dernier est dense dans X . D'autre part, par la formule de Green, pour tout $(u, v), (w, z)$ dans $D(A)$ on a

$$\langle A(u, v), (w, z) \rangle = - \langle (u, v), A(w, z) \rangle,$$

ce qui prouve que $\langle Ax, x \rangle = 0$ pour tout $x \in D(A)$. Ce qui prouve que A et $-A$ sont dissipatifs.

Soit maintenant $(f, g) \in X$. L'équation $(u, v) - A(u, v) = (f, g)$ est équivalente au système

$$\begin{cases} u - \Delta u = f + g, \\ v = u - f. \end{cases}$$

D'après 3.1.1, la première équation admet une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2$ et puis la deuxième équation, ce qui donne $v \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi A est m-dissipatif. De même $-A$ est m-dissipatif. On termine par le théorème de Stone. \square

Par Lax-Milgram, on peut écrire

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \exists \varphi_u \in H_0^1(\Omega), \Delta \varphi_u = u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \right\}, \quad (3.2)$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{-1} = \int (\nabla \varphi_u \cdot \nabla \varphi_v).$$

On pose maintenant $Y := L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et on définit l'opérateur

$$D(B) := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}.$$

3.3.2. Proposition. $(B, D(B))$ est anti-adjoint, en particulier B engendre un groupe unitaire.

Preuve. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset D(B)$, ce dernier est dense dans X . Soient $(u, v), (w, z)$ dans $D(B)$ et φ_v, φ_z tels que définis par (3.2). Comme $v, z \in L^2(\Omega)$, on a $\Delta \varphi_v, \Delta \varphi_z \in L^2(\Omega)$. En appliquant Green, on obtient

$$\begin{aligned} \langle B(u, v), (w, z) \rangle_{L^2 \times H^{-1}} &= \int vw \, dx + \langle \Delta u, z \rangle_{-1} \\ &= \int vw \, dx + \int \nabla u \nabla \varphi_z \, dx \\ &= \int vw \, dx - \int u \Delta \varphi_z \, dx \\ &= \int vw \, dx - \int uz \, dx. \end{aligned}$$

De même on a

$$\langle (u, v), B(w, z) \rangle_{L^2 \times H^{-1}} = \int zu \, dx - \int wv \, dx.$$

Donc

$$\langle B(u, v), (w, z) \rangle_{L^2 \times H^{-1}} = - \langle (u, v), B(w, z) \rangle_{L^2 \times H^{-1}}$$

D'où $\langle Bx, x \rangle = 0$, pour tout $x \in D(B)$. B est dissipatif.

Pour montrer la m-dissipativité, soit $(f, g) \in Y$. Par le même raisonnement que la preuve de 3.3.1, on voit qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$ solution de $(u, v) - B(u, v) = (f, g)$, i.e. B est m-dissipatif. $-B$ aussi. \square

Pour comprendre le lien entre les deux versions:

3.3.3. Proposition. *Avec les mêmes notations on a*

- (a) $X \hookrightarrow Y$ avec injection dense,
- (b) pour tout $U \in X$, $\|U\|_Y$ est équivalente à $\|(I - A)^{-1}U\|_X$,
- (c) $D(B) = X$,
- (d) pour tout $U \in D(A)$, $BU = AU$.

Preuve. Il faut juste montrer le point (ii).

Soient $U \in X$, $V \in D(A)$ tels que $U = (I - A)V$ et montrons que $\|(I - A)V\|_Y = \|U\|_X$. Comme B est anti-adjoint ($\langle Bx, x \rangle = 0$), on a

$$\|(I - A)V\|_Y^2 = \langle (I - B)V, (I - B)V \rangle_Y = \|V\|_Y^2 + \|BV\|_Y^2.$$

Si on note $V = (u, v)$, alors

$$\|BV\|_Y^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{H^{-1}}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{H^1}^2 = \|V\|_X^2.$$

D'où le résultat en utilisant le premier point. \square

On termine avec le problème de Cauchy associé, ici $(T(t))$ est le groupe unitaire engendré par A .

Le théorème suivant est une application directe des résultats précédents, en appliquant le changement tel que décrit au début de cette section:

3.3.4. Théorème. *Soit $(u_0, u_1) \in X$, alors $u(t) := p_1 [T(t)(u_0, u_1)]$ (la première composante) est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_0^1) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2) \cap C^2(\mathbb{R}, H^{-1}), \\ u''(t) = \Delta u(t) \text{ dans } H^{-1} \\ u(0) = u_0 \quad u_t(0) = u_1. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\|u(t)\|_X = \int |\nabla u(t)|^2 + u_t^2(t) = \|(u_0, u_1)\|_X = \int |\nabla u_0|^2 + u_1^2. \quad (3.3)$$

Enfin, si $(u_0, u_1) \in D(A)$, on a $u \in C^1(\mathbb{R}, H_0^1) \cap C^2(\mathbb{R}, L^2)$ et $\Delta u \in C(\mathbb{R}, L^2)$.

3.3.5. Remarque. L'égalité (3.3) exprime le fait qu'il s'agit d'un groupe d'isométrie. Cette égalité n'est autre que la conservation de l'énergie (voir 1.2.4).

3.4 Equation de Shrödinger

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $X := L^2(\Omega, \mathbb{C})$ considéré comme espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur

$$D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}), \Delta u \in X\},$$

$$Au := \Delta u.$$

En appliquant la proposition 3.1.1, on obtient

Le résultat suivant est une application directe de 3.1.1.

3.4.1. Proposition. $(A, D(A))$ est anti-adjoint, en particulier A engendre un groupe unitaire.

3.4.2. Remarque. Comme en 3.1.3, si la frontière de Ω est bornée et de classe C^2 , alors $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec normes équivalentes.

On pose maintenant $Y = H^{-1}(\Omega, \mathbb{C})$, et pour $u \in X$, on note $\varphi_u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ la solution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\Delta \varphi_u - \varphi_u = u$. X est muni du produit scalaire, pour $u, v \in X$

$$\langle u, v \rangle_{-1} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_{H^1} = \operatorname{Re} \left[\int \left(\nabla \varphi_u \cdot \overline{\nabla \varphi_v} + \varphi_u \overline{\varphi_v} \right) dx \right].$$

On définit l'opérateur

$$D(B) := H_0^1(\Omega),$$

$$Bu = \Delta u.$$

3.4.3. Proposition. $(B, D(B))$ est auto-adjoint négatif.

Preuve. $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(B)$ donc $D(B)$ est dense dans Y . Pour $u, v \in D(B)$, on a

$$\begin{aligned} \langle Bu, v \rangle_{-1} &= \langle Bu-, v \rangle_{-1} + \langle u, v \rangle_{-1} = \langle u, \varphi_v \rangle_{-1} + \langle u, v \rangle_{-1} \\ &= - \langle u, \varphi_v \rangle_{L^2} + \langle u, v \rangle_{-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\langle Bu, u \rangle_{-1} = -\|u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^{-1}}^2 \leq 0.$$

B est dissipatif. Par Lax-Milgram C est m-dissipatif, et le calcul précédent montre que pour tout $u, v \in D(B)$, $\langle Bu, v \rangle = \langle u, Bv \rangle$. Donc $G(B) \subset G(B^*)$. On conclut en utilisant 2.3.11. \square

Finalement, on considère l'opérateur

$$D(C) := H_0^1(\Omega),$$

$$Cu := i\Delta u$$

En appliquant cette proposition, on obtient

3.4.4. Corollaire. $(C, D(C))$ est anti-adjoint, en particulier C engendre un groupe unitaire.

On note $(S(t))$ et $(T(t))$ les groupes unitaires engendrés par A et C respectivement. Il est facile de remarquer que $G(A) \subset G(C)$ et que

3.4.5. Lemme. Pour tout $u_0 \in X$, on a $S(t)u_0 = T(t)u_0$.

Concernant le problème de Cauchy associé, on donne le théorème suivant qui est une conséquence directe des résultats précédents:

3.4.6. Théorème. Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors $u(t) := T(t)u_0$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_0^1) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}), \\ u'(t) = i\Delta u(t) \text{ dans } H^{-1} & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int |u(t)|^2 = \int |u_0|^2, \quad (3.4)$$

$$\int |\nabla u(t)|^2 = \int |\nabla u_0|^2, \quad (3.5)$$

enfin si $\Delta u_0 \in L^2$, on a $u \in C^1(\mathbb{R}, L^2)$ et $\Delta u \in C(\mathbb{R}, L^2)$.

3.4.7. Remarque. Les égalités (3.4) et (3.5) expriment le fait qu'on a des groupes unitaires.

Bibliographie

- [1] W. Arendt, C.J.K. Batty, Matthias Hieber and F. Neubrander, *Vector-valued Laplace transform and Cauchy problems*, Birkhäuser, Monographs in Mathematics vol. 96 (2000).
- [2] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, London (1971), Lecture Notes 5.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1983).
- [4] Th. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses (1990).
- [5] L.C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, GSM 19 (1998).
- [6] K.J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer, GTM 194 (2000).
- [7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equation of the second order*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [8] A. Harraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications* Masson, Paris (1991).
- [9] F. Hirsch and G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Masson (1997).
- [10] M. Renardy and R.C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag, TAM 13 (1993).
- [11] F. Trèves, *Basic linear partial differential equations*, Academic press (1975).