

# Chapitre 1

## INTRODUCTION A LA MODELISATION MATHEMATIQUE ET A LA SIMULATION NUMERIQUE

### 1.1 Introduction générale

### 1.2 Un exemple de modélisation

**Exercice 1.2.1** On suppose que la donnée initiale  $\theta_0$  est continue et uniformément bornée sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que (1.14) est bien une solution de (1.13).

**Correction.** Afin de montrer que  $\theta(t, x)$  est une fonction régulière et déterminer ses dérivées partielles, on souhaite appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. A cet effet, on pose  $G(x, t, y) = \exp\left(-\frac{(x-Vt-y)^2}{4\nu t}\right)$ . On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{x - Vt - y}{2\nu t} G(x, t, y) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \left(-\frac{1}{2\nu t} + \frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu^2 t^2}\right) G(x, t, y) \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{(x + Vt - y)(x - Vt - y)}{4\nu t^2} G(x, t, y).\end{aligned}$$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  et tout  $t > 0$ , il existe des constantes  $C(x, t)$  et  $\beta(x, t)$  positives telles que si  $z$  est suffisamment proche de  $x$ ,

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x}(z, t, y) \right| \leq C(x, t)(1 + |y|) \exp(-\beta(x, t)y).$$

Comme  $\theta_0(y)$  est uniformément bornée, on en déduit que

$$\left| \theta_0(y) \frac{\partial G}{\partial x}(z, t, y) \right| \leq C(x, t)(1 + |y|) \exp(-\beta(x, t)y) \sup_s |\theta_0(s)|$$

pour tout  $z$  appartenant à un voisinage de  $x$ . Le terme de droite est intégrable par rapport à  $y$ . Ainsi, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y)G(x, t, y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \frac{\partial G}{\partial x} dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \frac{x - Vt - y}{2\nu t} G(x, t, y) dy.\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y)G(x, t, y)dy &= \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \left( \frac{1}{2\nu t} - \frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu^2 t^2} \right) G(x, t, y) dy\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y)G(x, t, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \frac{(x + Vt - y)(x - Vt - y)}{4\nu t^2} G(x, t, y) dy.$$

Ainsi,  $\theta(t, x)$  est dérivable pour tout  $t > 0$  et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= - \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \frac{x - Vt - y}{2\nu t} G(x, t, y) dy \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= - \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \left( \frac{1}{2\nu t} - \frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu^2 t^2} \right) G(x, t, y) dy \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \left( \frac{(x + Vt - y)(x - Vt - y)}{4\nu t^2} - \frac{1}{2t} \right) G(x, t, y) dy.\end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

Il ne reste plus qu'à prouver que  $\theta(t, x)$  est prolongeable en  $t = 0$  et vérifie bien la condition initiale, c'est à dire que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy = \theta_0(x). \quad (1.1)$$

Rappelons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}. \quad (1.2)$$

(Il suffit de calculer  $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-|x|^2) dx$  en coordonnées polaires).

On pose

$$\rho(x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right).$$

D'après 1.2,  $\int \rho(x, t, y) dy = 1$  pour tout  $x$  et  $t$ . Enfin, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on constate que pour tout  $y$  différent de  $x$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(x, t, y) = 0$ . Ainsi,  $x$  étant fixé,  $\rho(x, t, y)$  est une fonction de  $y$  se concentrant en  $x$  lorsque  $t$  tend vers zéro. Pour être plus précis, on montre que pour tout  $\delta$  et  $\varepsilon$  réels strictement positifs, il existe  $t(\delta, \varepsilon)$  tel que pour tout  $t < t(\delta, \varepsilon)$ ,

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \rho(x, t, y) dy - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

et

$$\left| \int_{-\infty}^{x-\delta} \rho(x, t, y) dy + \int_{x+\delta}^{\infty} \rho(x, t, y) dy \right| \leq \varepsilon.$$

L'équation (1.1) découle alors du fait que  $\theta_0$  est continue, uniformément bornée.

**Exercice 1.2.2** On suppose que la donnée initiale  $\theta_0$  est dérivable et uniformément bornée sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que (1.16) est bien une solution de (1.15). Montrer que (1.16) est la limite de (1.14) lorsque le paramètre  $\nu$  tend vers zéro.

**Correction.**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = -V \frac{\partial \theta_0}{\partial x}(x) = -V \frac{\partial \theta}{\partial x}(x).$$

Ainsi,  $\theta$  vérifie l'équation différentielle annoncée. De plus,  $\theta$  vérifie trivialement la condition initiale.

Par un raisonnement analogue à celui qui nous avait permis d'établir la continuité de la solution dans l'exercice précédent, on montre que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy = \theta_0(x - Vt) = \theta(t).$$

### 1.3 Quelques modèles classiques

**Exercice 1.3.1** On se propose de retrouver une propriété de décroissance exponentielle en temps (voir la formule (1.14)) de la solution de l'équation de la chaleur (1.17) dans un domaine borné. En une dimension d'espace, on pose  $\Omega = (0, 1)$  et on suppose que  $f = 0$ . Soit  $u(t, x)$  une solution régulière de (1.17). En multipliant l'équation par  $u$  et en intégrant par rapport à  $x$ , établir l'égalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 u^2(t, x) dx \right) = - \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 dx$$

Montrer que toute fonction  $v(x)$  continuellement dérivable sur  $[0, 1]$ , telle que  $v(0) = 0$ , vérifie l'inégalité de Poincaré

$$\int_0^1 v^2(x) dx \leq \int_0^1 \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 dx.$$

En déduire la décroissance exponentielle en temps de  $\int_0^1 u^2(t, x) dx$ .

**Correction.** En multipliant l'équation différentielle (1.17), p.9 par  $u$  on obtient par intégration que

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx.$$

Quitte à supposer  $u$  suffisamment régulière, on peut appliquer le théorème d'intégration sous le signe somme au terme de gauche et effectuer une intégration par partie sur le terme de droite. On obtient ainsi que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 u^2 dx \right) = - \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx. \quad (1.3)$$

Soit  $v$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  telle que  $v(0) = 0$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$v^2(x) = \left( \int_0^x \frac{dv}{dt}(t) dt \right)^2 \leq x \int_0^x \left| \frac{dv}{dt}(t) \right|^2 dt \leq \int_0^1 \left| \frac{dv}{dt}(t) \right|^2 dt$$

d'où

$$\int_0^1 v^2(x) dx \leq \int_0^1 \left| \frac{dv}{dt}(t) \right|^2 dt.$$

En appliquant cette dernière inégalité à  $v = u$ , on obtient

$$\frac{df}{dt}(t) \leq -f(t)$$

où

$$f(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx.$$

Ainsi,

$$\frac{d(fe^t)}{dt} = \left( \frac{df}{dt} + f \right) e^t \leq 0$$

et pour tout  $t \geq 0$ ,

$$f(t)e^t \leq f(0).$$

**Exercice 1.3.2** On se place en dimension  $N = 1$  d'espace. On suppose que les données initiales  $u_0$  et  $u_1$  sont des fonctions régulières, et que  $f = 0$  avec  $\Omega = \mathbb{R}$ . On note  $U_1$  une primitive de  $u_1$ . Vérifier que

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2} (U_1(x+t) - U_1(x-t)), \quad (1.4)$$

est la solution unique de (1.18) dans la classe des fonctions régulières.

**Correction.** La fonction

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2} (U_1(x+t) - U_1(x-t))$$

où  $U_1$  est une primitive de  $u_1$  est trivialement une solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(t=0) = u_0 \text{ dans } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comme l'équation est linéaire, il suffit de prouver l'unicité pour  $u_0 = u_1 = 0$ . Soit  $x_0 < x_1$  et  $t < x_1 - x_0$ . En multipliant l'équation différentielle par  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , on obtient par intégration par partie que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_0+t}^{x_1-t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 \right) dx + \int_{x_0+t}^{x_1-t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 \right) dx \\ &\quad - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1 - t) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + t) = 0. \end{aligned}$$

Par commutation de la dérivation et de l'intégration, on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \int_{x_0+t}^{x_1-t} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx \right) \\ &\quad + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + t, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x_1 - t, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + t, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x_1 - t, t) \right|^2 \\ &\quad - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1 - t, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + t, t) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \left( \int_{x_0+t}^{x_1-t} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx \right) &= \\ \left| \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_0 + t, t) \right|^2 + \left| \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_1 - t, t) \right|^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{x_0+t}^{x_1-t} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx \right) \leq 0.$$

Pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $y_0$  et  $y_1$  tels que  $y_0 \leq y_1$ , on a donc

$$\int_{y_0}^{y_1} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx \leq \int_{x_0}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right|^2 dx = 0 \quad (1.5)$$

où  $x_0 = y_0 - t$  et  $x_1 = y_1 + t$ . On déduit de (1.5) que  $u(x, t) = 0$  pour tout  $x$  et  $t \geq 0$ , ce qui achève la démonstration.

**Exercice 1.3.3** Vérifier que la solution (1.19) au point  $(x, t)$  ne dépend des données initiales  $u_0$  et  $u_1$  qu'à travers leurs valeurs sur le segment  $[x - t, x + t]$ . Vérifier aussi que  $u(-t, x)$  est solution de (1.18) dans  $\Omega \times \mathbb{R}_*^-$ .

**Correction.** On rappelle que

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + t) + u_0(x - t)) + \frac{1}{2}(U_1(x + t) - U_1(x - t)),$$

où  $U_1$  est une primitive de  $u_1$ . Comme

$$U_1(x + t) - U_1(x - t) = \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

ne dépend que de la restriction de  $u_1$  sur l'intervalle  $[x - t, x + t]$ , on en déduit que  $u(t, x)$  ne dépend que de  $u_0$  et  $u_1$  restreints à  $[x - t, x + t]$ . L'information se propage à vitesse finie. Enfin, on vérifie sans mal que  $u(-t, x)$  est solution de la même équation sur  $\Omega \times \mathbb{R}_*^-$ , quitte à remplacer  $u_1$  par  $-u_1$ .

**Exercice 1.3.4** On se propose de démontrer un principe de conservation de l'énergie pour l'équation des ondes (1.18) sans utiliser la formule explicite (1.19). En une dimension d'espace, on pose  $\Omega = (0, 1)$  et on suppose  $f = 0$ . Soit  $u(t, x)$  une solution régulière de (1.18). En multipliant l'équation par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et en intégrant par rapport à  $x$ , établir l'égalité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 dx + \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 dx \right) = 0.$$

Conclure et comparer à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur.

**Correction.** En multipliant l'équation des ondes par  $\partial u / \partial t$ , on obtient par intégration

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = 0.$$

On applique alors le théorème de dérivation sous le signe somme au premier terme de l'équation et on effectue une intégration par partie sur le second. Il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \right) + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx = 0.$$

En appliquant à nouveau le théorème de dérivation sous le signe somme (au deuxième terme cette fois), on établit la conservation de l'énergie.

Dans le cas de l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet, l'énergie totale décroît exponentiellement. La température tend à devenir uniformément nulle au sein de l'ouvert  $\Omega$ . Il y a donc une déperdition d'énergie par le bord de  $\Omega$ . Le comportement est très différent pour la solution de l'équation des ondes. En effet, l'énergie est conservée au cours du temps.

**Exercice 1.3.5** On se propose de démontrer des principes de conservation de l'énergie pour l'équation de Schrödinger (1.21). Soit  $u(t, x)$  une solution régulière de (1.21) en une dimension d'espace qui décroît vers zéro (ainsi que  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ) lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Montrer que pour toute fonction dérivable  $v(t)$  on a

$$\mathcal{R} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \bar{v} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |v|^2}{\partial t},$$

où  $\mathcal{R}$  désigne la partie réelle et  $\bar{v}$  le complexe conjugué de  $v$ . En multipliant l'équation par  $\bar{u}$  et en intégrant par rapport à  $x$ , établir l'égalité d'énergie

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx.$$

En multipliant l'équation par  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ , montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 + V(x) |u(t, x)|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \left| \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \right|^2 + V(x) |u_0(x)|^2 \right) dx.$$

**Correction.** Soit  $v$  une fonction dérivable,

$$\mathcal{R} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \bar{v} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} v \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v \bar{v}}{\partial t}$$

On a bien

$$\mathcal{R} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \bar{v} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |v|^2}{\partial t}. \quad (1.6)$$

En multipliant l'équation de Schrödinger par  $\bar{u}$ , on obtient par intégration que

$$i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bar{u} - V|u|^2 dx = 0$$

Par intégration par partie sur le second membre, on obtient

$$i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + V|u|^2 dx$$

(les hypothèses de décroissance effectuées sur  $u$  permettent d'éliminer les termes de bords à "l'infini"). Comme le second membre est réel,  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx$  est un imaginaire pure,

$$\mathcal{R} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx \right) = 0.$$

D'après (1.6), on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial |u|^2}{\partial t} dx = 0.$$

Pourvu que la solution  $u$  soit suffisamment régulière, on peut commuter le signe somme et intégrale, ainsi

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx.$$

En multipliant l'équation de Schrödinger par  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ , il vient

$$\int_{\mathbb{R}} i \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - V u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx = 0$$

Par intégration par partie du second membre, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} i \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} - V u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx = 0.$$

En considérant la partie réelle de cette égalité, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + V |u|^2 \right) dx = 0.$$

Il suffit d'échanger la dérivation par rapport au temps et le signe intégrale afin d'obtenir le résultat escompté

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + V |u|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|^2 + V |u_0|^2 \right) dx.$$

## 1.4 Calcul numérique par différences finies

**Exercice 1.4.1** Le but de cet exercice est de montrer que le schéma implicite **(1.29)**, avec  $V = 0$ , vérifie aussi le principe du maximum discret. On impose des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que la formule **(1.29)** est valable pour  $1 \leq j \leq J$  et on fixe  $u_0^n = u_{J+1}^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit deux constantes  $m \leq 0 \leq M$  telles que  $m \leq u_j^0 \leq M$  pour  $1 \leq j \leq J$ . Vérifier que l'on peut bien calculer de manière unique les  $u_j^{n+1}$  en fonction des  $u_j^n$ . Montrer que pour tous les temps  $n \geq 0$  on a encore les inégalités  $m \leq u_j^n \leq M$  pour  $1 \leq j \leq J$  (et ceci sans condition sur  $\Delta t$  et  $\Delta x$ ).

**Correction.** Tout d'abord, montrons que le schéma implicite **(1.29)**, p.16 est défini correctement. On pose  $U^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq J}$ . On vérifie que le schéma implicite équivaut à déterminer  $U^n$  tel que

$$AU^n = U^{n-1}.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1+2c & -c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c & 1+2c & -c & 0 & & \vdots \\ 0 & -c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -c & 0 \\ \vdots & & & & 0 & -c & 1+2c & -c \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c & 1+2c \end{pmatrix}$$

et  $c = \nu\Delta t/(\Delta x)^2$ . Il s'agit donc de prouver que la matrice  $A$  est inversible, ce qui est aisé. En effet,  $A$  est symétrique, définie positive donc inversible : Soit  $X \in \mathbb{R}^J$ . Par convention, on pose  $X_0 = X_{J+1} = 0$ . On a

$$X^T A X = \sum_{j=0}^J \frac{X_j^2 + X_{j+1}^2}{2} + c(X_{j+1} - X_j)^2.$$

Reste à prouver que le schéma vérifie le principe du maximum. On raisonne par récurrence sur  $n$ . Supposons que  $m \leq u_j^{n-1} \leq M$  pour tout  $j \in \{0, \dots, J+1\}$  rappelons que d'après les conditions aux bords,  $m \leq 0 \leq M$ . Soit  $m' = \inf_{j \in \{1, \dots, J\}} u_j^n$  et  $M' = \sup_{j \in \{1, \dots, J\}} u_j^n$ . Montrons que  $M' \leq M$ . Si  $M' = 0$ , on a rien à démontrer. Dans le cas contraire, le supremum de  $u_j^n$  est atteint. En d' autres termes, il existe  $k \in \{1, \dots, J\}$  tel que  $M' = u_k^n$ . Or d'après le schéma,

$$(1+2c)u_k^n = u_k^{n-1} + 2c \left( \frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} \right)$$

Comme  $\frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} \leq u_k^n$ , on en déduit que

$$(1+2c)u_k^n \leq u_k^{n-1} + 2cu_k^n,$$

d' où

$$M' = u_k^n \leq u_k^{n-1} \leq M.$$

Quitte a remplacer  $u$  par  $-u$ , on obtient également  $m' \geq m$ .

**Exercice 1.4.2** Montrer que, si la condition CFL (1.37) n'est pas satisfaite, le schéma décentré amont (1.36) pour l'équation d'advection est instable pour la donnée initiale  $u_j^0 = (-1)^j$ .

**Correction.** Le schéma décentré amont est défini par

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Considérons comme donnée initiale  $u_j^0 = (-1)^j$ . On montre par une récurrence évidente que

$$u_j^n = \left( 1 - \frac{2V\Delta t}{\Delta x} \right)^n (-1)^j.$$

Ainsi, la suite  $u^n$  reste bornée si et seulement si

$$\left| 1 - \frac{2V\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

Ainsi  $u^n$  est bornée si et seulement si la condition CFL

$$\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

est vérifiée.

**Exercice 1.4.3** Ecrire un schéma explicite centré en espace pour l'équation des ondes (1.18) en une dimension d'espace et sans terme source. Préciser comment démarrer les itérations en temps. Vérifier l'existence d'un cône de dépendance discret analogue à celui continu illustré par la Figure 1.4. En déduire que, si ce schéma converge, les pas de temps et d'espace doivent nécessairement satisfaire la condition (de type CFL)  $\Delta t \leq \Delta x$ .

**Correction.** Pour l'équation des ondes (1.18), p.10 sans terme source, le schéma explicite centré est

$$\frac{u_j^{n-1} - 2u_j^n + u_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} + \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Ainsi,

$$u_j^{n+1} = -u_j^{n-1} + 2u_j^n + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n). \quad (1.7)$$

On initialise le schéma en posant

$$u_j^0 = u_0(j\Delta x) \text{ et } u_j^1 = u_j^0 + \Delta t u_1(j\Delta x).$$

Au vu de l'équation (1.7), on montre par une récurrence évidente que la valeur de  $u_j^{n+1}$  ne dépend que des valeurs des  $u_{j+k}^1$  pour  $k$  entier,  $-n \leq k \leq n$  et de  $u_{j+l}^0$  pour  $l$  entier,  $-n < l < n$ .

On note  $u(t, x)$  la solution de l'équation des ondes. Comme la valeur  $u((n+1)\Delta t, j\Delta x)$  dépend des valeurs de  $u_0$  et  $u_1$  sur  $[j\Delta x - (n+1)\Delta t, j\Delta x + (n+1)\Delta t]$ , pour que le schéma converge, on doit avoir

$$(j - n - 1)\Delta x \leq j\Delta x - (n + 1)\Delta t \text{ et } j\Delta x + (n + 1)\Delta t \leq (j + n + 1)\Delta x,$$

conditions qui sont équivalentes à

$$\Delta t \leq \Delta x.$$

## 1.5 Remarques sur les modèles mathématiques

**Exercice 1.5.1** Le but de cet exercice est de montrer que le problème de Cauchy pour le Laplacien est mal posé. Soit le domaine bidimensionnel  $\Omega = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ . On considère le problème de Cauchy en  $x$  et le problème aux limites en  $y$  suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x, 0) = u(x, 2\pi) = 0 & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0, y) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = -e^{-\sqrt{n}} \sin(ny) & \text{pour } 0 < y < 2\pi \end{cases}$$

Vérifier que  $u(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(ny) \operatorname{sh}(nx)$  est une solution. Montrer que la condition initiale et toutes ses dérivées en  $x = 0$  convergent uniformément vers 0, tandis que, pour tout  $x > 0$ , la solution trouvée  $u(x, y)$  et toutes ses dérivées ne sont pas bornés quand  $n$  tend vers l'infini. Conclure.

**Correction.** Ici,  $x$  joue le rôle du temps. On vérifie sans mal que la solution proposée est une solution du système. D'autre part,

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = \begin{cases} e^{-\sqrt{n}} n^k \sin(ny) \sinh(nx) & \text{si } k \text{ est pair} \\ e^{-\sqrt{n}} n^{k-1} \sin(ny) \cosh(nx) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^{2p} u}{\partial y^{2p}} = e^{-\sqrt{n}} (-1)^p n^{2p-1} \sin(ny) \sinh(nx) \\ \frac{\partial^{2p+1} u}{\partial y^{2p+1}} = e^{-\sqrt{n}} (-1)^p n^{2p} \cos(ny) \sinh(nx). \end{cases}$$

On constate que en  $x = 0$ ,  $u$  ainsi que toutes ses dérivées convergent vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . A contrario, si  $x > 0$ , ni  $u$  ni ses dérivées ne sont bornées par rapport à  $n$ . Or, pour des conditions initiales (i.e. en  $x = 0$ ) nulles, la fonction  $u = 0$  est une solution triviale du système. Ainsi, des perturbations infinitésimales des conditions initiales (même pour la norme très forte  $\mathcal{C}^\infty$ ) induisent de très grandes perturbations de la solution (pour n'importe quelle norme raisonnable, même faible). Le problème de Cauchy proposé est donc mal posé.

