Chapitre 2

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

2.1 Introduction

2.2 Différences finies pour l'équation de la chaleur

Exercice 2.2.1 Montrer que le schéma (**2.6**) n'est rien d'autre que le θ-schéma avec $\theta = 1/2 - (\Delta x)^2/12\nu\Delta t$.

Correction. Trivial.

Exercice 2.2.2 Pour chacun des schémas de la Sous-section **2.2.1**, vérifier que l'erreur de troncature est bien du type annoncé dans le Tableau **2.1**. (On remarquera que tous ces schémas sont consistants sauf celui de DuFort-Frankel.)

Correction. On rappelle les développements de Taylor suivant :

$$\frac{u(t_n, x_{j-1} - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{(\Delta x)^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \mathcal{O}((\Delta x)^6)$$

et

$$\frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

1. Explicite **(2.2), p.30**
   Démontré dans le cours Lemme **2.2.6, p.33**.

2. Implicite **(2.3), p.30**

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}+\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&\qquad=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t_{n+1},x_j)-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j)\\
&\qquad\quad-\frac{\nu(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j)+O\left((\Delta t)^2+(\Delta x)^4\right)\\
&\qquad=-\left(\frac{\Delta t}{2}+\frac{(\Delta x)^2}{12\nu}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{n+1},x_j)+O\left((\Delta t)^2+(\Delta x)^4\right).
\end{aligned}$$

Le schéma implicite est donc d'ordre 1 en temps et 2 en espace.
3. θ-schéma **(2.5), p.31**, schéma de Crank-Nicholson et schéma à 6 points **(2.6), p.31**

Comme le schéma de Crank-Nicholson n'est autre que le θ schéma pour $\theta = 1/2$ et le schéma à six point **(2.6), p.31** pour $\theta = 1/2-(\Delta x)^2/12\nu\Delta t$, il suffit d'étudier la consistance du θ-schéma. Par développement de Taylor, on montre que

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}+\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+2u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&=\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\frac{\nu(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\\
&\quad-\frac{\nu(\Delta x)^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t_n,x_j)+\mathcal{O}((\Delta x)^6+(\Delta t)^3)\\
&=\left(\frac{\Delta t\nu^2}{2}-\frac{(\Delta x)^2\nu}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\left(\frac{(\Delta t)^2\nu^3}{6}-\frac{(\Delta x)^4\nu}{360}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t_n,x_j)\\
&\quad+\mathcal{O}((\Delta x)^6+(\Delta t)^3)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}\\
&+\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&=-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{(\Delta t)^2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\frac{\nu(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\\
&\quad-\frac{\nu(\Delta x)^2\Delta t}{12}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}-\frac{\nu(\Delta x)^2(\Delta t)^2}{24}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}-\frac{\nu(\Delta x)^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(t_n,x_j)\\
&\quad+\mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^6+(\Delta x)^4(\Delta t))\\
&=-\left(\frac{\Delta t\nu^2}{2}+\frac{\nu(\Delta x)^2\nu}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{(\Delta t)^2\nu^2}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\\
&\quad-\left(\frac{(\Delta t)^2\nu^3}{3}+\frac{\Delta t(\Delta x)^2\nu^2}{12}+\frac{(\Delta x)^4\nu}{360}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\\
&\quad-\frac{(\Delta t)^2(\Delta x)^2\nu^3}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^6+(\Delta x)^4(\Delta t)).
\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire, on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t} &+ \theta\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2} \\
&+ (1-\theta)\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+2u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2} \\
&= \left(\left(\frac{1-2\theta}{2}\right)\nu^2\Delta t - \frac{\nu(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\
&+\theta\frac{(\Delta t)^2\nu^2}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \left(\frac{(\Delta t)^2\nu^3}{6} - \frac{(\Delta x)^4\nu}{360}\right. \\
&\left. - (\Delta t)^2\nu^3\theta\left(\frac{1}{2}+\frac{(\Delta x)^2}{12(\Delta t)\nu}\right)\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \\
&-\theta\frac{(\Delta t)^2(\Delta x)^2\nu^3}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^6+(\Delta x)^4(\Delta t)).
\end{aligned}$$

Pour $\theta \neq 1/2$, le θ-schéma est d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Pour $\theta = 1/2$ (schéma de Crank-Nicholson), le schéma est d'ordre 2 en espace et en temps. Pour $\theta = 1/2 - (\Delta x)^2/12\nu\Delta t$, le schéma est d'ordre 4 est espace et 2 en temps. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t} &+ \theta\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+2u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{(\Delta x)^2} \\
&+ (1-\theta)\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+2u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\nu(\Delta x)^2}{12} - \frac{\nu(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\nu\Delta t}\right)\frac{(\Delta t)^2\nu^2}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \left(\frac{3(\Delta x)^4\nu}{720} - \frac{(\Delta t)^2\nu^3}{6}\right)\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \\
&- \left(\frac{\nu(\Delta x)^2}{12} - \frac{\nu(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{(\Delta t)^2(\Delta x)^2\nu^3}{24}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \\
&+ \mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^6+(\Delta x)^4(\Delta t)).
\end{aligned}$$

5. Schéma de DuFort-Frankel **(2.7), p.31**

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^4)$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{-u(t_n,x_{j-1})+u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n-1},x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2} \\
&= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{(\Delta t)^4}{12(\Delta x)^2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \\
&+ \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta t)^6}{(\Delta x)^2} + (\Delta x)^4\right)
\end{aligned}$$

En combinant ces deux expressions, on en déduit que si u est solution de l'équation de la chaleur,

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t}\\
&+\nu\frac{-u(t_n,x_{j-1})+u(t_{n+1},x_j)+u(t_{n-1},x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\\
&=\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2-\frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{(\Delta t)^2\nu^3}{12}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\\
&\quad+\frac{(\Delta t)^4\nu^4}{12(\Delta x)^2}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\mathcal{O}\left(\frac{(\Delta t)^6}{(\Delta x)^2}+(\Delta x)^4\right).
\end{aligned}$$

Le schéma est d'ordre $\mathcal{O}((\Delta t/\Delta x)^2+(\Delta x)^2)$.
6. Schéma de Gear **(2.8), p.31**

$$\begin{aligned}
&3u(t_{n+1},x_j)-4u(t_n,x_j)+u(t_{n-1},x_j)\\
&\qquad=2(\Delta t)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{2}{3}(\Delta t)^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_{n+1},x_j)+\mathcal{O}((\Delta t)^4)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&-u(t_{n+1},x_{j-1})+3u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})\\
&\qquad=-(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mathcal{O}((\Delta x)^6).
\end{aligned}$$

En appliquant ces deux développements de Taylor à la solution u de l'équation des ondes, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{3u(t_{n+1},x_j)-4u(t_n,x_j)+u(t_{n-1},x_j)}{(\Delta x)^2}\\
&+\nu\frac{-u(t_{n+1},x_{j-1})+3u(t_{n+1},x_j)-u(t_{n+1},x_{j+1})}{2\Delta t}\\
&=-\frac{\nu(\Delta x)^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{(\Delta t)^2}{3}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\mathcal{O}((\Delta t)^3+(\Delta x)^3)
\end{aligned}$$

Le schéma de Gear est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Exercice 2.2.3 Montrer que le schéma de Crank-Nicholson **(2.5)** (avec $\theta=1/2$) est stable en norme L^∞ si $\nu\Delta t\leq(\Delta x)^2$, et que le schéma de DuFort-Frankel **(2.7)** est stable en norme L^∞ si $2\nu\Delta t\leq(\Delta x)^2$

Correction. Le schéma de Crank-Nicholson est défini de manière implicite par

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\nu\frac{-u_{j-1}^{n+1}+2u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2}+\nu\frac{-u_{j-1}^n+2u_j^n-u_{j+1}^n}{2(\Delta x)^2}=0, \tag{2.1}$$

$$u_0^{n+1}=u_{N+1}^{n+1}=0. \tag{2.2}$$

On va montrer que sous une condition CFL appropriée, ce schéma vérifie le principe du maximum discret.

Soit k et l tels que

$$u_k^{n+1} = M = \max_j u_j^{n+1} \text{ et } u_l^{n+1} = m = \min_j u^{n+1}.$$

Notons que M est positif ou nul et m négatif ou nul. On va montrer que

$$M \leq \max(0, \max_j u_j^n) \text{ et } m \geq \min(0, \min_j u_j^n). \tag{2.3}$$

Si $M = 0$, la première partie est triviale. Supposons $M \neq 0$, dans ce cas, $0 < k < N+1$ et d'après (2.1),

$$\frac{M - u_k^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{k-1}^n + 2u_k^n - u_{k+1}^n}{2(\Delta x)^2} \leq 0,$$

soit

$$M \leq \left(1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_k^n + \frac{\nu \Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n).$$

Si

$$\nu \Delta t \leq (\Delta x)^2, \tag{2.4}$$

le terme de droite est une combinaison convexe des coordonnées de u^n, et le premier point de (2.3) est vérifié. La minoration de m s'en déduit en remplaçant u^n par $-u^k$ et M par $-m$. Si la condition CFL (2.4) est vérifiée, le schéma de Crank-Nicholson vérifie le principe du maximum discret. En conséquence, il est stable pour la norme L^∞.

Le schéma de DuFort-Frankel **(2.7), p.31** est défini par

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{\nu}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\nu}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n-1} + \frac{\nu}{(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$$

Si $2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_j^{n-1}, u_{j-1}^n et u_{j+1}^n. Ainsi, il est stable pour la norme L^∞, c'est a dire

$$\|u^n\|_\infty \leq \max\left(\|u^0\|_\infty, \|u^1\|_\infty\right).$$

Exercice 2.2.4 Montrer que le θ-schéma **(2.5)** est stable en norme L^2 inconditionnellement si $1/2 \leq \theta \leq 1$, et sous la condition CFL $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$ si $0 \leq \theta < 1/2$.

Correction. Étudions la stabilité en norme L^2 du θ-schéma. Par application de la transformation de Fourier, il vient

$$\left(1 + \frac{2\theta\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(2k\pi\Delta x))\right) \hat{u}^{n+1}(k) =$$
$$\left(1 + \frac{2(\theta-1)\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(2k\pi\Delta x))\right) \hat{u}^n(k).$$

Ainsi, le schéma sera stable en norme L^2 dès que

$$\left|1+\frac{2(\theta-1)\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos(2k\pi\Delta x))\right| \leq \left|1+\frac{2\theta\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos(2k\pi\Delta x))\right|$$

pour tout k, c'est à dire

$$\left|1-\frac{4\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2+4\theta\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)}\right| \leq 1$$

ou encore

$$0 \leq \frac{4\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)}{(\Delta x)^2+4\theta\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x)} \leq 2.$$

Comme θ est positif, cette condition est équivalente à

$$(\Delta x)^2 \geq 2(1-2\theta)\nu\Delta t\sin^2(k\pi\Delta x).$$

Cette dernière relation est vérifiée pour tout k dès que $(1-2\theta) \leq 0$ ou $(\Delta x)^2 \geq 2(1-2\theta)\nu\Delta t$.

Exercice 2.2.5 Montrer que le schéma à 6 points (**2.6**) est inconditionnellement stable en norme L^2.

Correction. Par transformation de Fourier appliquée au schéma à 6 points **(2.6), p.31**, on obtient

$$\left(\frac{\cos(2k\pi\Delta x)}{6\Delta t}+\frac{5}{6\Delta t}\right)(\hat{u}^{n+1}-\hat{u}^n)+\frac{\nu}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))(\hat{u}^{n+1}+\hat{u}^n)=0,$$

c'est à dire

$$\left(5+\cos(2k\pi\Delta x)+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^{n+1} = \left(5+\cos(2k\pi\Delta x)-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right)\hat{u}^n.$$

Le schéma est donc L^2-stable dès que

$$5+\cos(2k\pi\Delta x)+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x)) \geq \left|5+\cos(2k\pi\Delta x)-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(4-\cos(2k\pi\Delta x))\right|.$$

Relation qui est trivialement vérifiée indépendamment de Δx et Δt.

Exercice 2.2.6 Montrer que le schéma de Gear (**2.8**) est inconditionnellement stable et donc convergent en norme L^2.

Correction. En appliquant la transformation de Fourier au schéma de Gear **(2.8), p.31**, on obtient

$$\left(3 + c\sin^2(k\pi\Delta x)\right)\hat{u}^{n+1} = 4\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}, \tag{2.5}$$

où $c = \frac{8\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}$. On introduit les polynômes (dépendants implicitement de k, Δt et Δx)

$$P(X) = (3 + 8c\sin^2(k\pi\Delta x))X^2 - 4X + 1.$$

On note λ_1 et λ_2 les racines de P et Δ son discriminant. Les solutions de 2.5 s'expriment explicitement en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$:

$$\hat{u}^n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^0 + \left(\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\hat{u}^1 & \text{si } \Delta \neq 0, \\ (1-n)\lambda_1^n\hat{u}^0 + n\lambda_1^{n-1}\hat{u}^1 & \text{si } \Delta = 0. \end{cases}$$

Une condition nécessaire de stabilité est donc que $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$ soient au plus égaux à un. Dans ce cas, afin que le schéma soit stable, il suffit qu'il existe deux réels δ et β tels que pour tout k, Δx et Δt,

$$|\Delta(k, \Delta x, \Delta t)| \leq \delta \Longrightarrow \max(|\lambda_1(k, \Delta x, \Delta t)|, |\lambda_2(k, \Delta x, \Delta t)|) < \beta < 1. \tag{2.6}$$

En effet, posons $C(\beta) = \max_n n\beta^n$. Comme $0 < \beta < 1$, $C(\beta) < +\infty$. De plus, si $|\Delta(k, \Delta x, \Delta t)| \geq \delta$,

$$\left|\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right| \leq 2/\sqrt{\delta};$$

si $0 < |\Delta(k, \Delta x, \Delta t)| < \delta$,

$$\left|\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right| \leq 2n\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)^n \leq 2C(\beta);$$

et si $\Delta(k, \Delta x, \Delta t) = 0$, $n|\lambda_1|^n \leq C(\beta)$. De ces trois inégalités, on en déduit que

$$|\hat{u}^n(k)| < K(|\hat{u}^0 + \hat{u}^1|)$$

où $K = 1 + 2C(\beta) + 2/\sqrt{\delta}$. Ainsi, $\|\hat{u}^n\|_{L^2} \leq K(\|u^0\|_{L^2} + \|u^1\|_{L^2})$.

Reste à prouver que la condition 2.6 est en effet vérifiée. Tout d'abord, on vérifie que pour tout k, Δx et Δt, $|\lambda_1| \leq 1$ et $|\lambda_2| \leq 1$. Enfin, λ_1 et λ_2 sont des fonctions continues de Δ. Or si $\Delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Il existe donc δ et β, $1/2 < \beta < 1$ tels que la condition 2.6 est vérifiée.

Exercice 2.2.7 Montrer que le schéma de DuFort-Frankel (**2.7**) est inconditionnellement stable en norme L^2. Montrer que, si on fait tendre Δt et Δx vers 0 de telle manière que le rapport $\Delta t/\Delta x$ tende aussi vers 0, alors le schéma de DuFort-Frankel est convergent. (On dit qu'il est "conditionnellement" convergent.)

Correction. Par transformation de Fourier, on obtient que

$$\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^{n-1} + \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(-2\hat{u}^n\cos(2k\pi\Delta x) + \hat{u}^{n+1} + \hat{u}^{n-1}) = 0.$$

Soit encore

$$(1+c)\hat{u}^{n+1}(k) - 2c\cos(k\pi\Delta x)\hat{u}^n(k) - (1-c)\hat{u}^{n-1}(k) = 0,$$

où

$$c = \frac{2(\Delta t)\nu}{(\Delta x)^2}.$$

Notons que dans le cas $c \leq 1$, on a prouvé précédemment la stabilité L^∞ du schéma de DuFort-Frankel. Cette dernière impliquant la stabilité L^2, nous n'avons plus qu'à étudier le cas $c > 1$. On procède comme pour l'exercice précédent. Considérons le polynôme

$$P(X) = (1+c)X^2 - 2\beta\cos(k\pi\Delta x)X - (1-c)$$

On vérifie sans mal que les racines de P sont de module inférieur ou égale à un. Enfin,

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| \leq (1+c)^{-1}\left(c|\cos(2k\pi\Delta x)| + |\Delta|^{1/2}/2\right).$$

Or $c^2\cos^2(2k\pi\Delta x) = \Delta/4 + \beta^2 - 1$. Ainsi,

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| \leq (1+c)^{-1}\left(|\Delta/4 + c^2 - 1|^{1/2} + |\Delta|^{1/2}/2\right).$$

Le terme de gauche est continue par rapport à Δ et c. De plus, pour $\Delta = 0$, il est égale à $(\frac{c-1}{c+1})^{1/2}$. Sous la condition CFL $c < M$, il existe γ tel que $(\frac{c-1}{c+1})^{1/2} < \gamma < 1$. Comme $[1, c] \times 0$ est un compact, il existe δ et ε tel que pour tout $1 \leq c \leq M$,

$$|\Delta| \leq \delta \Longrightarrow \left(|\Delta/4 + c^2 - 1|^{1/2} + |\Delta|^{1/2}/2\right) < \gamma + \varepsilon < 1.$$

La condition 2.6 est vérifiée. Le schéma est donc convergent pourvu que le rapport $\Delta t/(\Delta x)^2$ reste borné. Enfin, la stabilité combinée à la consistance implique la convergence.

Exercice 2.2.8 Montrer que le schéma explicite (**2.29**) est stable en norme L^∞ (et même qu'il vérifie le principe du maximum) sous la condition CFL

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Correction. Le schéma explicite **(2.29), p.44** est défini par

$$u_{j,k}^{n+1} = \left(1 - 2\Big(\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta u)^2}\Big)\right)u_{j,k}^n$$
$$+ \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n) + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}(u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n)$$

Si

$$\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq 1/2,$$

$u_{j,k}^{n+1}$ est une combinaison convexe de coordonnées de u^n et

$$|u_{j,k}^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty.$$

Exercice 2.2.9 Montrer que le schéma de Peaceman-Rachford (**2.31**) est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction. 1. Consistance

En effectuant la soustraction des deux équations **(2.31), p.46** définissant le schéma de Peaceman-Rachford, on obtient l'expression de $u^{n+1/2}$ en fonction de u^n et u^{n+1}.

$$u_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} + \frac{\nu\Delta t}{4(\Delta y)^2}(u_{j,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}).$$

En substituant l'expression de $u^{n+1/2}$ dans l'une des équations du schéma, on détermine la relation reliant u^{n+1} à u^n. On pourrait effectuer le calcul explicite de cette expression, puis établir la consistance. Cependant, cela constitue un calcul fastidieux qu'on peut éviter. On introduit donc la fonction intermédiaire

$$\begin{aligned} v_{\Delta t,\Delta x,\Delta y}(x,y) = & \frac{u(t+\Delta t,x,y) + u(t,x,y)}{2} + \frac{\nu\Delta t}{4(\Delta y)^2} \\ & \Big(u(t,x,y-\Delta y) - 2u(t,x,y) + u(t,x,y+\Delta y) \\ & - u(t+\Delta t,x,y-\Delta y) + 2u(t+\Delta t,x,y) - u(t+\Delta t,x,y+\Delta y)\Big) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour toute solution u de l'équation de l'équation de la chaleur, l'erreur de troncature est

$$\begin{aligned} E(u) = & \frac{v(t,x,y) - u(t,x,y)}{\Delta t} + \nu\frac{-v(t,x-\Delta x,y) + 2v(t,x,y) - v(t,x+\Delta x,y)}{2(\Delta x)^2} \\ & + \nu\frac{-u(t,x-\Delta x,y) + 2u(t,x,y) - u(t,x+\Delta x,y)}{2(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

où v est définit par 2.7. Par développement de Taylor, on établit que

$$\begin{aligned} & v_{\Delta t,\Delta x,\Delta y} \\ = & u + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial y^2}\right) + \frac{(\Delta t)^3}{48}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 6\nu\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial y^2}\right) \\ & + O\left((\Delta y)^4\Delta t + (\Delta t)^4 + (\Delta t)^2(\Delta y)^2\right) \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}
E(u) =& \frac{v-u}{\Delta t} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \mathcal{O}((\Delta x)^4 + (\Delta y)^4) \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u\right) + \frac{\Delta t}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u\right) \\
&+ \frac{(\Delta t)^2}{48}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 6\nu\frac{\partial^2\Delta u}{\partial t^2} - 6\nu^2\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^2\partial y^2}\right) \\
&- \frac{\nu}{24}\left((\Delta x)^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (\Delta y)^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) \\
&+ O\left((\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 + (\Delta t)^3 + \Delta t((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si u est solution de l'équation de la chaleur, on en déduit que l'erreur de troncature est d'ordre 2 en espace et en temps.

2. Étude de la stabilité L^2

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on en déduit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Ainsi, $\hat{u}^{n+1}(k,l) = A(k,l)\hat{u}^n(k,l)$ où

$$A(k,l) = \frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(l\pi\Delta y)}\frac{1 - 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}{1 + 2\frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(k\pi\Delta x)}.$$

Comme pour tout $x \geq 0$, $|(1-x)/(1+x)| \leq 1$, on a $|A(k,l)| \leq 1$. Le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.2.10 Montrer que le schéma de directions alternées (**2.32**) est précis d'ordre 2 en espace et temps et inconditionnellement stable en norme L^2 (pour des conditions aux limites de périodicité dans chaque direction).

Correction. 1. Étude de la consistance

Le schéma n'est autre que l'application successive de deux schémas de Crank-Nicholson. Il est donc consistant et du même ordre : 2 en temps et en espace.

2. Étude de la stabilité L^2

En appliquant la transformation de Fourier au schéma, on établit que

$$\hat{u}^{n+1/2} = \frac{1 - \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2(\pi k\Delta x)}\hat{u}^n$$

et

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(\pi l\Delta y)}{1 + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta y)^2}\sin^2(\pi l\Delta y)}\hat{u}^{n+1/2}.$$

Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}| \leq |\hat{u}^{n+1/2}| \leq |\hat{u}^n|$ et le schéma est inconditionnellement stable L^2.

2.3 Autres modèles

Exercice 2.3.1 Montrer que le schéma implicite centré (**2.35**) est consistant avec l'équation d'advection (**2.33**), précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace, inconditionnellement stable en norme L^2, donc convergent.

Correction. La consistance et la précision ne posent pas de problèmes. Pour la stabilité L^2, l'analyse de Fourier conduit à

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left(1 + i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)^{-1}\hat{u}^n(k) = A(k)\hat{u}^n(k).$$

On vérifie alors que le module du facteur d'amplification est toujours plus petit que 1

$$|A(k)|^2 = \left(1 + \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)^2\right)^{-1} \leq 1,$$

donc le schéma est inconditionnellement stable. La convergence s'obtient alors par le Théorème de Lax **2.2.20, p.40**.

Exercice 2.3.2 Montrer que le schéma de Lax Wendroff est stable et convergent en norme L^2 si $|V|\Delta t \leq \Delta x$.

Correction. Il suffit de montrer la stabilité en norme L^2 afin d'en déduire la convergence par le théorème de Lax. En appliquant la transformation de Fourier au schéma de Lax-Wendroff **(2.38), p.50**, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k)$$

où

$$A(k) = 1 - 2\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(k\pi\Delta x) - i\frac{V\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)$$

Le schéma est stable en norme L^2 dès que $|A(k)| \leq 1$. On montre aisément que

$$|A(k)|^2 = 1 - 4\sin^2(k\pi\Delta x)\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Ainsi, le schéma est stable et convergent dès que

$$\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Exercice 2.3.3 Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs préserve le principe du maximum discret si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite, tandis que le schéma de Lax-Wendroff ne le préserve pas sauf si $V\Delta t/\Delta x$ vaut $-1, 0,$ ou 1.

Correction. 1. Schéma de Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{j+1}^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\right)u_{j-1}^n.$$

Ainsi, u_j^{n+1} est une combinaison linéaire convexes de u_{j+1}^n et u_j^n dès que $|V|\Delta t \leq \Delta x$. Sous cette condition, le schéma vérifie le principe du maximum discret.
2. Schéma de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} - 1\right) u_{j+1}^n + \left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) u_j^n + \frac{V\Delta t}{2\Delta x}\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} + 1\right) u_{j-1}^n.$$

Le schéma préserve le principe du maximum discret, ssi chacun des coefficients apparaissant dans le terme de droite sont positifs, c'est à dire ssi $V\Delta t/\Delta x = -1$, 0 ou 1.

Exercice 2.3.4 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff (**2.38**) est le seul schéma précis à l'ordre 2 en espace et temps qui soit du type

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n,$$

où α, β, γ dépendent seulement de $V\Delta t/\Delta x$.

Correction. L'erreur de troncature est

$$E = (\Delta t)^{-1}\left(u(x_j, t_{n+1}) - \alpha u(x_{j-1}, t_n) - \beta u(t_n, x_j) - \gamma u(t_n, x_{j+1})\right).$$

En effectuant un développement de Taylor en (x_j, t_n), on montre que

$$\begin{aligned} E = (\Delta t)^{-1}\left(1 - (\alpha+\beta+\gamma)\right) u + \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha - \gamma)\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\alpha+\gamma}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + \frac{|\alpha-\gamma|}{c}(\Delta x))^2\right). \end{aligned}$$

Si u est solution de l'équation d'advection,

$$\partial u/\partial t = -V\partial u/\partial x \text{ et } \partial^2 u/\partial t^2 = V^2 \partial^2 u/\partial x^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E = (\Delta t)^{-1}\left(1 - (\alpha+\beta+\gamma)\right) u - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(c - (\alpha - \gamma)\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\left(c^2 - (\alpha+\gamma)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + \frac{|\alpha-\gamma|}{c}(\Delta x)^2\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ainsi, si le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace, on doit avoir

$$\begin{aligned} 1 - (\alpha+\beta+\gamma) &= \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (1 + \frac{|\alpha-\gamma|}{c}(\Delta x)^2)\right)\Delta t \\ c - \alpha + \gamma &= \mathcal{O}\left(c(\Delta t)^2 + |\alpha-\gamma|(\Delta x)^2\right) \\ c - (\alpha+\gamma) &= \mathcal{O}\left(c^2(\Delta t) + |\alpha-\gamma|\Delta x\right). \end{aligned}$$

En faisant tendre vers zéro Δt et Δx à c constant, on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{aligned} 1-(\alpha+\beta+\gamma) &= 0 \\ c-\alpha+\gamma &= 0 \\ c-(\alpha+\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} &\alpha = c(1+c)/2 \\ &\beta = 1-c^2 \\ &\gamma = c(c-1)/2. \end{aligned}$$

Enfin, comme $\alpha-\gamma=\mathcal{O}(c)$, d'après 2.8, le schéma est effectivement d'ordre 2 en espace et en temps.

Exercice 2.3.5 Montrer que le schéma explicite décentré amont (**2.39**) est consistant avec l'équation d'advection (**2.33**), précis à l'ordre 1 en espace et temps, stable et convergent en norme L^2 si la condition CFL $|V|\Delta t \leq \Delta x$ est satisfaite.

Correction. La consistance d'ordre 1 en temps et en espace est aisée à établir. En effet, dans le cas $V>0$,

$$\frac{u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)}{\Delta t}+V\frac{u(t_n,x_j)-u(t_n,x_{j+1})}{\Delta x} \\ = (u_t+Vu_x)(t_n,x_j)+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Le cas $V<0$ est identique. Enfin, la stabilité L^2 se déduit de la stabilité L^∞.

Exercice 2.3.6 Montrer que l'équation équivalente du schéma décentré amont (**2.39**) est

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{|V|}{2}\left(\Delta x-|V|\Delta t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Correction. Considérons le cas $V>0$. L'erreur de troncature du schéma décentré amont **(2.39), p.51** est

$$E=\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{V\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).$$

Soit u tel que l'erreur de troncature du schéma décentré soit d'ordre 2 en espace et en temps, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Ainsi, l'erreur de troncature pour u est égale à

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{V}{2}(V\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{O}((\Delta t)^2+(\Delta x)^2).$$

L'équation équivalente dans le cas $V > 0$ est donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V}{2}(V\Delta t - \Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Il suffit de substituer Δx par $-\Delta x$ pour obtenir l'équation équivalente dans le cas $V < 0$. Enfin, on peut résumer ces deux résultats par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{|V|}{2}(\Delta x - |V|\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

valable dans les deux cas.

Exercice 2.3.7 Montrer que l'équation équivalente du schéma de Lax-Wendroff (**2.38**) est

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V(\Delta x)^2}{6}\left(1 - \frac{(V\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Correction. L'erreur de troncature dans le cas du schéma de Lax-Wendroff **(2.38), p.50** est

$$\begin{aligned} E(u) = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} &+ V\frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2\Delta x} \\ &- \left(\frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})}{(\Delta x)^2}. \end{aligned}$$

En effectuant un développement de Taylor en (t_n, x_j), on montre que

$$\begin{aligned} E(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &+ \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \\ &+ \frac{V(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^3 + (\Delta t)^3). \quad (2.9) \end{aligned}$$

Soit u tel que $E(u)$ soit d'ordre 3 en espace et en temps, on montre que dans ce cas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$$

De plus, $\partial^3 u/\partial t^3 = -V^3\partial^3 u/\partial^3 x + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$. En substituant ces expressions dans l'équation 2.9, on obtient l'équation équivalente attendue :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V(\Delta x)^2}{6}\left(1 - V^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mathcal{O}((\Delta x)^3 + (\Delta t)^3).$$

Exercice 2.3.8 Soit l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0,x) = \sin(\omega x + \phi) \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \end{array}\right.$$

avec $V, \nu, \mu, \omega, \phi \in \mathbb{R}$. Montrer que sa solution est

$$u(t,x) = \exp(-\nu\omega^2 t) \sin\left(\omega(x - (V + \mu\omega^2)t) + \phi\right)$$

(on admettra son unicité). En déduire que la diffusion atténue l'amplitude de la solution, tandis que la dispersion modifie la vitesse de propagation.

Correction. On vérifie aisément que

$$u(t,x) = \exp(-\nu\omega^2 t) \sin(\omega(x - (V + \mu\omega^2)t) + \phi)$$

est solution de l'équation donnée. L'atténuation de l'amplitude est $\exp(-\nu\omega^2 t)$. Elle est donc d'autant plus forte que le terme de diffusion ν est important par rapport à ω^{-2}. La vitesse de propagation de l'onde est $(V + \mu\omega^2)$ et dépend donc du terme de dispersion μ.

Exercice 2.3.9 On définit le schéma "saute-mouton" (leapfrog, en anglais)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Etudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est stable sous la condition CFL $|V|\Delta t \leq M\Delta x$ avec $M < 1$.

Correction.
1. Étude de la consistance

Par développement de Taylor en (t_n, x_j) on a

$$\frac{u(t_{n+1},x_j) - u(t_{n-1},x_j)}{2\Delta t} + V\frac{u(t_n,x_{j+1}) - u(t_n,x_{j-1})}{2\Delta x} =$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + V\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Si u est solution de l'équation d'advection, l'erreur de troncature est donc

$$E = \frac{1}{12}\left((\Delta x)^2 - (\Delta t)^2 V^3\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Ainsi, le schéma saute-mouton est consistant, d'ordre 2 en espace et en temps.
2. Stabilité L^2

Par transformation de Fourier, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^{n-1} - i2c\sin(2\pi k\Delta x)\hat{u}^n(k). \tag{2.10}$$

où $c = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$. On introduit les polynômes (dépendants implicitement de k, Δt et Δx)

$$P(X) = X^2 + i2c\sin(2\pi k\Delta x)X - 1.$$

On note λ_1 et λ_2 les racines de P et $\Delta = 4(1 - c^2\sin^2(2k\pi\Delta x)$ son discriminant. Les solutions de 2.10 s'expriment explicitement en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$:

$$\hat{u}^n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\hat{u}^0 + \left(\frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\hat{u}^1 & \text{si } \Delta \neq 0, \\ (1-n)\lambda_1^n\hat{u}^0 + n\lambda_1^{n-1}\hat{u}^1 & \text{si } \Delta = 0. \end{cases}$$

Si $c > 1$, le module de la somme des deux racines est égale à $2c > 2$. Le module de l'une des deux racines est plus grand que un et le schéma est instable. Si $c = 1$, on peut avoir $\Delta = 0$ pour certaines valeurs de k et Δx. Dans ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ et

$$\hat{u}^n = (n\hat{u}^1 + i(n-1)\hat{u}^0)i^{n-1}.$$

Le schéma est instable.

Considérons le cas où c est majoré par une constante $M < 1$. Dans ce cas, les racines de P sont de même module

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.$$

De plus, $|\lambda_1 - \lambda_2| = \sqrt{\Delta} > 2\sqrt{(1-M^2)} > 0$. On déduit de l'expression explicite de $\hat{u}^n$ en fonction de $\hat{u}^0$ et $\hat{u}^1$ que

$$|\hat{u}^n| \leq \frac{|\hat{u}^0 + \hat{u}^1|}{2(1-M^2)}.$$

Ainsi, sous la condition CFL $V\Delta t/\Delta x < M < 1$, le schéma saute mouton est stable L^2.

Exercice 2.3.10 On définit le schéma de Crank-Nicholson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4\Delta x} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4\Delta x} = 0.$$

Etudier la consistance et l'erreur de troncature de ce schéma. Montrer par analyse de Fourier qu'il est inconditionnellement stable.

Correction.

1. Consistance

Par développement de Taylor, on montre que

$$\begin{aligned}\frac{u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j)}{\Delta t} &+ \frac{u(t_{n+1},x_{j+1}) - u(t_{n+1},x_{j-1})}{4\Delta x}\\ + V\frac{u(t_n,x_{j+1}) - u(t_n,x_{j-1})}{4\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t^2} + V\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)\\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{V}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}\right)\\ &+ \frac{(\Delta x)^2 V}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).\end{aligned}$$

Ainsi, si u est solution de l'équation d'advection,n l'erreur de troncature est

$$E(u) = \frac{V}{12}\left(2(\Delta x)^2 - V^2(\Delta t)^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Le schéma de Crank-Nicholson est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

2. Stabilité L^2

Par transformation de Fourier, on établit que

$$\hat{u}^{n+1}\left(1+\frac{iV\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right)=\hat{u}^{n}\left(1-\frac{iV\Delta t}{2\Delta x}\sin(2\pi k\Delta x)\right).$$

Ainsi, $|\hat{u}^{n+1}|=|\hat{u}^n|$. Le schéma est donc inconditionnellement stable en norme L^2.

Exercice 2.3.11 Démontrer la dernière inégalité dans (**2.43**), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C>0$ indépendante de k telle que $\|P(k)\|_2\|P(k)^{-1}\|_2\leq C$, pourvu que la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}<\sqrt{\frac{1}{1-4\theta}}$$

soit satisfaite.

Correction. Nouvel énoncé :

On suppose que u_1 est tel que

$$\int_0^1 u_1(x)dx=0.$$

On pose $v_j=u(x_j)-(N+1)^{-1}\sum_{k=0}^N u(x_k)$. On modifie légèrement le $\theta-$schéma centré : on définie u_j^0 et u_j^1 par

$$u_j^0=u_0(x_j)\ \textit{et}\ \frac{u_j^1-u_j^0}{\Delta t}=v_j.$$

Démontrer la stabilité L^2 du $\theta-$ schéma centré sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{1-4\theta}<1-\delta,$$

où $\delta>0$. Plus précisément, montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout n,

$$\|u^n\|_{L^2}\leq C(\|u^0\|_{L^2}+\|v\|_{L^2}).$$

On utilise l'analyse de Fourier pour obtenir

$$\hat{U}^{n+1}(k)=\begin{pmatrix}\hat{u}^{n+1}(k)\\ \hat{u}^n(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)}{1+\theta\alpha(k)} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{U}^n(k)=A(k)\hat{U}^n(k),$$

où

$$\alpha(k)=4\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2(\pi k\Delta x)$$

Ainsi, $\hat{U}^{n+1}(k)=A(k)^n\hat{U}^0(k)$. Les valeurs propres de la matrice $A(k)$ sont les racines du polynôme

$$\lambda^2-\frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)}{1+\theta\alpha(k)}\lambda+1=0, \tag{2.11}$$

dont le discriminant est

$$\Delta(k) = -\frac{\alpha(k)}{(1+\theta\alpha(k))^2}\left(4-(1-4\theta)\alpha(k)\right).$$

Si $\alpha(k) = 0$, le polynôme (2.11 possède une racine double $\lambda = 1$. Si $\alpha(k) \neq 0$, d'après la condition CFL, $\Delta(k) < 0$ et le polynôme possède deux racines distinctes complexes, conjuguées l'une de l'autre, de module 1. Considérons le premier cas, c'est à dire $\alpha(k) = 0$. Dans ce cas, il existe p tel que $k = p(N+1)$. De plus, comme $\sum_j v_j = 0$, on a $\hat{v}(k) = 0$. Ainsi, $\hat{u}^1(k) = \hat{u}^0(k)$. Or

$$A(k)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\hat{U}^n(k) = A(k)^n\hat{U}^n(0) = A(k)^n\begin{pmatrix}\hat{u}^0(k)\\ \hat{u}^0(k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{u}^0(k)\\ \hat{u}^0(k)\end{pmatrix} = \hat{U}^0(k).$$

On a montré que si $\alpha(k) = 0$, $\hat{u}^n(k) = \hat{u}^0(k)$ pour tout n.

Reste à considérer le cas $\alpha(k) \neq 0$. Dans ce cas, le polynôme (2.11) possède deux racines distinctes λ et $\overline{\lambda}$. La matrice $A(k)$ est diagonalisable. Plus précisément,

$$A(k) = \frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\begin{pmatrix}\lambda & \overline{\lambda}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \overline{\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\overline{\lambda}\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A(k)^n = \frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\begin{pmatrix}\lambda & \overline{\lambda}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \overline{\lambda}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\overline{\lambda}\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une expression explicite de $\hat{u}^{n+1}(k)$ en fonction de $\hat{u}^0(k)$ et $\hat{v}(k)$. Plus précisément,

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\left(\left((\lambda^{n+1}-\overline{\lambda}^{n+1}) - (\lambda^n-\overline{\lambda}^n)\right)\right)\hat{u}^0(k) - \Delta t(\lambda^n-\overline{\lambda}^n)\hat{v}(k),$$

ou encore

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\left(\lambda^n(\lambda-1) - \overline{\lambda}^n(\overline{\lambda}-1)\right)\hat{u}^0(k) - \Delta t(\lambda^n-\overline{\lambda}^n)\hat{v}(k).$$

Un calcul explicite de la racine λ du polynôme (2.11) nous donne

$$\lambda = \frac{2-(1-2\theta)\alpha(k)+i\sqrt{-\Delta(k)}}{2(1+\theta\alpha(k))}.$$

D'après la condition CFL, il existe une constante C_1 indépendante de k telle que

$$\left|\frac{\lambda-1}{\lambda-\overline{\lambda}}\right| = (2(1+\theta\alpha(k)))^{-1}\left|1+i2(1-2\theta)\sqrt{\frac{\alpha(k)}{4-(1-4\theta)\alpha(k)}}\right| < C_1. \qquad (2.12)$$

D'autre part, en utilisant à nouveau la condition CFL, on établit qu'il existe une constante C_2, indépendante de k telle que

$$\frac{\Delta t}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \leq C_2 \frac{\Delta t}{\sqrt{\alpha(k)}}$$

Or

$$\min_{k:\sin(k\pi\Delta x)\neq 0} \sqrt{\alpha(k)} = 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\sin(\pi\Delta x) > \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\pi\Delta x = \pi\Delta t$$

dès que Δx est assez petit. Ainsi,

$$\frac{\Delta t}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \leq \pi^{-1}C_2.$$

De cette dernière estimation, de l'esimation (2.12) ,de l'expression de $u^{n+1}(k)$ et le module de λ étant égale à 1, on déduit que

$$|\hat{u}^{n+1}(k)| \leq C_1|\hat{u}^0(k)| + \pi^{-1}C_2|\hat{v}(k)|.$$

Le schéma est donc stable pour la norme L^2 et il existe une constante C telle que

$$\|u^n\|_{L^2} \leq C\left(\|u^0\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\right)$$

Exercice 2.3.12 On considère le cas limite du Lemme **2.3.6**, c'est-à-dire $\Delta t/\Delta x = (1-4\theta)^{-1/2}$ avec $0 \leq \theta < 1/4$. Montrer que le θ-schéma centré (**2.42**) est instable dans ce cas en vérifiant que $u_j^n = (-1)^{n+j}(2n-1)$ est une solution (remarquez qu'il s'agit d'une instabilité "faible" puisque la croissance de u^n est linéaire et non exponentielle).

Correction. Soit $u_j^n = (-1)^{n+j}(2n-1)$,

$$-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n = 4(-1)^{n+j}(2n-1)$$

et

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = 4(-1)^{n+j+1}(2n-1).$$

En substituant ses relations dans l'expression du θ schéma et en considérant le cas $(\Delta t\Delta x)^2 = (1-4\theta)^{-1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \theta\frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad + (1-2\theta)\frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \theta\frac{-u_{j-1}^{n-1} + 2u_j^{n-1} - u_{j+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad\quad = 4(\Delta t)^{-2}(2n-1)(-1)^{n+j}\big(-1 - \theta(1-4\theta)^{-1} \\
&\qquad\qquad\qquad + (1-2\theta)(1-4\theta)^{-1} - \theta(1-4\theta)^{-1}\big) = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 2.3.13 Montrer que le θ-schéma centré (**2.42**) conserve l'énergie discrète, c'est-à-dire que $E^n = E^0$ pour tout $n \geq 0$.

Correction. On multiplie **(2.42), p.55** par $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$ et il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta t)^2}\left(u_j^{n+1} - u_j^n - (u_j^n - u_j^{n-1})\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^n + (u_j^n - u_j^{n-1})\right)\\
+&\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right)\\
+&\frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(-(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + 2(u_j^{n+1} - u_j^n) - (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right)\\
+&\frac{\theta}{(\Delta x)^2}\left(-(u_{j-1}^{n-1} - u_{j-1}^n) + 2(u_j^{n-1} - u_j^n) - (u_{j+1}^{n-1} - u_{j+1}^n)\right)\left(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Si on somme par rapport à j, comme

$$\sum_{j=0}^{N}\left(-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n\right)v_j = \sum_{j=0}^{N}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)\left(v_{j+1} - v_j\right),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right)^2 - \sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}\right)^2\\
&+a_{\Delta x}(u^n, u^{n+1} - u^{n-1})\\
&+a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n + (u^n - u^{n-1}))\\
&+a_{\Delta x}(u^{n-1} - u^n, u^{n+1} - u^n + (u^n - u^{n-1})) = 0,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right)^2 + a_{\Delta x}(u^n, u^{n+1}) + \theta a_{\Delta x}(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n)\\
=&\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}\right)^2 + a_{\Delta x}(u^{n-1}, u^n) + \theta a_{\Delta x}(u^n - u^{n-1}, u^n - u^{n-1}).
\end{aligned}$$

Exercice 2.3.14 Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs (**2.45**) est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$, et qu'il est précis à l'ordre 1 en espace et temps si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est gardé constant lorsque Δt et Δx tendent vers zéro.

Correction.
1. Consistance

On pose $U = (v, w)$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On effectue un développement de Taylor en (t_n, x_j) sur le schéma **(2.45), p.58** :

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(2U(t_{n+1},x_j) - U(t_n,x_{j+1}) - U(t_n,x_{j-1})\right) + \frac{1}{2\Delta x}J\left(U(t_n,x_{j+1}) - U(t_n,x_{j-1})\right) = \frac{\partial U}{\partial t} - J\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\left(1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + \frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right)$$

Le schéma est donc consistant et précis à l'ordre 1 si le rapport $\Delta t/\Delta x$ est constant.

2. Stabilité L^2

Étudions la stabilité L^2. Par transformation de Fourier, on établit que

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^{n+1} \\ \hat{w}^{n+1} \end{pmatrix} = \left(\cos(2k\pi\Delta x) - i\sin(2k\pi\Delta x)\frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \hat{v}^{n} \\ \hat{w}^{n} \end{pmatrix}.$$

On pose $\alpha = \cos(2k\pi\Delta x)$ et $\beta = \sin(2k\pi\Delta x)\frac{\Delta t}{\Delta x}$. On diagonalise la matrice $A(k)$ et on établit que

$$A(k) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = I.$$

Ainsi, le schéma est stable L^2 si et seulement si $|\alpha + i\beta| \leq 1$. Or

$$|\alpha + i\beta|^2 = (\cos(2k\pi\Delta x)^2 + \sin(2k\pi\Delta x)^2(\Delta t/\Delta x)^2)$$

et que le schéma est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$.

Exercice 2.3.15 Montrer que le schéma de Lax-Wendroff (**2.46**) est stable en norme L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$, et qu'il est précis à l'ordre 2 en espace et temps.

Correction.

1. Consistance

On pose $U = (v, w)$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On effectue un développement de Taylor en (t_n, x_j) sur le schéma **(2.46), p.58** :

$$\frac{1}{\Delta t}(U(t_{n+1},x_j) - U(t_n,x_j)) - \frac{1}{2\Delta x}J.\left(U(t_n,x_{j+1}) - U(t_n,x_{j-1})\right) + \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}(-U(t_n,x_j - 1) + 2U(t_n,x_j) - U(t_n,x_{j+1})) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - J\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + (\Delta x)^3).$$

Si U est solution de l'équation **(2.44), p.58**, on en déduit que l'erreur de troncature est

$$E(U) = \frac{1}{6}\left((\Delta t)^2 J - (\Delta x)^2 I\right)\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2).$$

2. Stabilité L^2.

Établissons la stabilité L^2 sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x$. Par transformation de Fourier, on établit que

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \left(1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x) + i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)J\right)\hat{U}^n(k)$$

On pose $\alpha = 1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\pi\Delta x)$ et $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(2k\pi\Delta x)$ et on procède comme pour l'exercice précédent. Ainsi, le schéma est stable L^2 ssi $|\alpha + i\beta| \leq 1$. Or

$$|\alpha + i\beta|^2 = 1 + 4\sin^2(k\pi\Delta x)\left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(1 - \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Ainsi, le schéma est stable L^2 dès que

$$\frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$