Chapitre 3

FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

3.1 Généralités

Exercice 3.1.1 Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que (**3.2**) a une solution unique dans $C^2([0,1])$ donnée par la formule

$$u(x) = x\int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds \text{ pour } x \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Correction. On vérifie aisément que

$$u(x) = x\int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds$$

est bien solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

L'équation étant linéaire, il suffit de montrer que seul l'application nulle est solution de l'équation 3.2 lorsque $f = 0$, ce qui est évident.

3.2 Approche variationnelle

Exercice 3.2.1 Déduire de la formule de Green (**3.5**) la formule de Stokes

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x)\phi(x)\,dx = -\int_\Omega \sigma(x)\cdot\nabla\phi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\cdot n(x)\,\phi(x)\,ds,$$

où ϕ est une fonction scalaire de $C^1(\overline{\Omega})$ et σ une fonction à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{\Omega})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Correction.

$$\int_\Omega \nabla.\sigma(x)\phi(x) + \sigma(x).\nabla\phi(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}(x)\phi(x) + \sigma_i(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \sigma_i \phi}{\partial x_i}(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \sigma_i(x)\phi(x)n_i(x)ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sigma(x).n(x)\phi(x)dx.$$

Exercice 3.2.2 En dimension $N = 3$ on définit le rotationnel d'une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, comme la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathrm{rot}\phi = \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right).$$

Pour ϕ et ψ, fonctions à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{\Omega})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$, déduire de la formule de Green (**3.5**)

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\phi \cdot \psi \, dx - \int_\Omega \phi \cdot \mathrm{rot}\psi \, dx = - \int_{\partial\Omega} (\phi \times n) \cdot \psi \, ds.$$

Correction.

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\phi.\psi - \phi \mathrm{rot}\psi \; dx$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \right) \psi_1 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) \psi_2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) \psi_3$$

$$- \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \right) \phi_1 - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) \phi_2 - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \phi_3 \; dx$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_2\psi_3 - \phi_3\psi_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi_3\psi_1 - \phi_1\psi_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1) \; dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \phi_2\psi_3 - \psi_3\psi_2 \\ \phi_3\psi_1 - \phi_1\psi_3 \\ \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 \end{pmatrix} .n \; ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\phi \wedge \psi).n \; ds.$$

Exercice 3.2.3 On considère le Laplacien avec condition aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (**3.9**) si et seulement si u appartient à $C^1(\overline{\Omega})$ et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_\Omega f(x)v(x) \, dx \text{ pour toute fonction } v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{3.4}$$

En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans $C^2(\overline{\Omega})$ de (**3.9**) est que $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

Correction. Supposons que u soit solution du problème aux limites de Neumann **(3.9)**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En multipliant l'équation vérifiée par u par dans Ω par une fonction test $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, on obtient, suite à une intégration par partie que

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

Comme $\partial u / \partial n = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \text{ pour tout } v \in X. \tag{3.5}$$

Réciproquement, supposons que u soit une fonction régulière vérifiant (3.5), on en déduit, par intégration par partie que

$$-\int_\Omega (\Delta u(x) - f(x)) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds = 0$$

pour tout $v \in C^1(\overline{\Omega})$. On en déduit que $\Delta u - f = 0$ sur Ω puis que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

En choisissant la fonction $v = 1$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, on en déduit que s'il existe une solution u régulière du problème au limites **(3.9)**,

$$\int_\Omega f(x) \; dx = 0.$$

Exercice 3.2.4 On considère l'équation des plaques

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.6}$$

On note X l'espace des fonctions v de $C^2(\overline{\Omega})$ telles que v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ s'annulent sur $\partial\Omega$. Soit u une fonction de $C^4(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (3.6) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \Delta u(x) \Delta v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \tag{3.7}$$

Correction. On procède comme pour l'exercice précèdent. Soit u une solution régulière de l'équation des plaques **(3.11)** pour tout $v \in X$,

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx. \tag{3.8}$$

Par intégration par partie,

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx \;\; = \;\; -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \partial(\Delta u) \partial n(x) v(x) dx.$$

Comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla v(x)dx$$

puis par une nouvelle intégration par partie que

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x)v(x)dx = \int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \Delta u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)dx.$$

Comme $\frac{\partial v}{\partial n}(x) = 0$ sur $\partial\Omega$, le dernier terme de cette équation est nulle. Ainsi, on déduit de (3.8) que

$$\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

La réciproque s'établit comme lors de l'exercice précédent (on reprend les intégrations par partie effectuées dans l'autre sens).

3.3 Théorie de Lax-Milgram

Exercice 3.3.1 Le but de cet exercice est de montrer que l'espace V, défini par (**3.19**) et muni du produit scalaire (**3.20**), n'est pas complet. Soit Ω la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $N = 1$, on définit la suite

$$u_n(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 < x < -n^{-1}, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n) & \text{si } -n^{-1} \le x \le n^{-1}, \\ x-1 & \text{si } n^{-1} < x < 1. \end{cases}$$

Si $N = 2$, pour $0 < \alpha < 1/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = |\log(|x|^2 + n^{-1})|^{\alpha/2} - |\log(1 + n^{-1})|^{\alpha/2}.$$

Si $N \geq 3$, pour $0 < \beta < (N-2)/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = \frac{1}{(|x|^2 + n^{-1})^{\beta/2}} - \frac{1}{(1 + n^{-1})^{\beta/2}}.$$

Montrer que la suite u_n est de Cauchy dans V mais qu'elle ne converge pas dans V lorsque n tend vers l'infini.

Correction.
Cas $N = 1$**.** La suite u_n converge vers la fonction $|x| - 1$ pour la norme associée au produit scalaire **3.20**. Comme $|x| - 1$ n'appartient pas à V, V n'est pas complet.
Cas $N = 2$**.** Soit u la fonction définie par

$$u(x) = \left|\log(|x|^2)\right|^\alpha.$$

La fonction u est dérivable en tout $x \neq 0$ et

$$\nabla u = -\frac{2\alpha x}{|x|^2}\left(-\log(|x|^2)\right)^{\alpha-1}.$$

De plus, ∇u appartient à $L^2(\Omega)$ ($\int_0^{1/2} \frac{1}{r(\log r)^{2(\alpha-1}} dr < +\infty$)). Il est aisé de constater que la suite ∇u_n converge dans L^2 vers ∇v. Il suffit a cet effet, d'appliquer le théorème de Lebesgue en remarquant que

$$|\nabla u_n - \nabla u|^2 \leq 2\max(|\nabla u|, 2/\log(2))^2.$$

Si V était complet, comme u_n est de Cauchy, elle serait convergente vers un élément de v. Cette limite ne peut-être que u, ce qui est absurde u n'étant pas continue en 0 n'appartient pas à V.
Cas $N \geq 3$**.** On procède comme dans le cas précédent. En particulier, u_n et de Cauchy et le gradient de u_n converge dans $L^2(\Omega)$ vers

$$\nabla u = -\beta\frac{x}{|x|^{\beta+2}},$$

où $u(x) = 1/|x|^\beta$ (La fonction ∇u appartient bien à L^2, car $\int_0^{1/2} r^{-2\beta+N-3} dr < +\infty$ dès que $\beta < (N-2)/2$).