Chapitre 4

ESPACES DE SOBOLEV

4.1 Introduction et avertissement

4.2 Fonctions de carré sommable et dérivation faible

Exercice 4.2.1 Soit $\Omega = (0,1)$. Montrer que la fonction x^α est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Correction. Tout d'abord, x^α appartient à $L^2(0,1)$ si et seulement si $\alpha > -1/2$. Si α est un réel strictement plus grand que $-1/2$, d'après la définition **4.2.3, p.75**, x^α admet une dérivée faible dans $L^2(0,1)$ si et seulement si il existe $w \in L^2(0,1)$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$,

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)dx = -\int_0^1 w(x)\varphi(x)dx.$$

Or comme φ est à support compact, il existe $a > 0$ tel que $\varphi(]0,a[) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)dx &= \int_a^1 x^\alpha \varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)dx = -\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)dx\end{aligned}$$

(Les intégrations par partie sur $(a,1)$ ne posent aucun problème, x^α étant de classe C^∞ sur cet intervalle). On en déduit que x^α admet une dérivée faible L^2 si et seulement si $\alpha x^{\alpha-1} = w \in L^2(0,1)$, c'est à dire $\alpha - 1 > -1/2$.

Exercice 4.2.2 Soit Ω un ouvert borné. Montrer qu'une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, et C^1 par morceaux est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

Correction. Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Il existe une famille d'ouverts deux à deux disjoints $(\Omega_i)_{i=1,\cdots,N}$ telle que

$$\bigcup_i \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$$

et $f_i = f_{\Omega_i}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma_{i,j} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ la frontière commune entre deux sous-ouverts de Ω et n^i la normale extérieure à l'ouvert Ω_i. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. En appliquant la formule de Green **(3.5), p.62** à chacun des ouverts Ω_i, on obtient

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)dx = \sum_i \int_{\Omega_i} f_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)dx$$
$$= \sum_i \int_{\partial\Omega_i} f_i(x)\varphi(x)n_k^i ds - \int_{\Omega_i}\frac{\partial f_i}{\partial x^k}\varphi(x)dx$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x^k}\varphi(x)dx + \sum_{\substack{,j\\ i\neq j}} \int_{\Gamma_{i,j}} f_i(x)\varphi(x)n_k^i ds.$$

Or pour tout couple (i,k) et tout point $x \in \Gamma_{i,k}$, $n_k^i(x) = -n_i^k(x)$, et comme f est continue, $f_i(x) = f_k(x)$. On en déduit que

$$\sum_{\substack{,j\\ i\neq j}} \int_{\Gamma_{i,j}} f_i(x)\varphi(x)n_k^i ds = \sum_{\substack{,j\\ i<k}} \int_{\Gamma_{i,k}} \varphi(x)(f_i(x)n_k^i + f_j(x)n_j^k)ds = 0$$

et

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)dx = -\int_\Omega \frac{f}{\partial x^k}\varphi(x)dx.$$

Enfin, la fonction $\partial f/\partial x^k$ étant continue par morceaux sur un ouvert borné, elle appartient à $L^2(\Omega)$.

Remarque 4.2.1 *On suppose que chacun des ouverts Ω_i est suffisamment régulier pour que la formule de Green soit valable. Ce qui est le cas, par exemple si Ω_i est régulier par morceau avec des coins d'angles différents de 0 et 2π.*

Exercice 4.2.3 Soit Ω un ouvert borné. Montrer qu'une fonction C^1 par morceaux mais pas continue n'est pas dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

Correction. On utilise les mêmes notations que l'exercice précédent, on a toujours

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)dx = -\int_\Omega \frac{f}{\partial x^k}\varphi(x)dx + \sum_{\substack{,j\\ i<k}} \int_{\Gamma_{i,k}} \varphi(x)(f_i(x)n_k^i + f_j(x)n_j^k)ds$$

d'où

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}(x)dx = -\int_\Omega \frac{f}{\partial x^k}\varphi(x)dx + \sum_{\substack{,j\\ i<k}} \int_{\Gamma_{i,k}} \varphi(x)(f_i(x) - f_j(x))n_k^i ds$$

Supposons que f soit dérivable dans L^2. Dans ce cas, il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\sum_{\substack{,j\\ i<k}} \int_{\Gamma_{i,k}} \varphi(x)(f_i(x) - f_j(x))n_k^i ds = \int_\Omega w(x)\varphi(x)dx.$$

En particulier, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_i)$, on a

$$\int_{\Omega_i} w(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Ainsi, $w = 0$ presque partout dans $\Omega = \cup_i \Omega_i$ et

$$\sum_{\substack{,j \\ i<k}} \int_{\Gamma_{i,k}} \varphi(x)(f_i(x) - f_j(x))n_k^i ds = 0$$

pour toute fonction test φ. On en déduit que pour tout $x \in \cup_{i,j}\Gamma_{i,k}$, $f_i(x) = f_j(x)$, c'est à dire que f est continue.

Exercice 4.2.4 Soit Ω un ouvert borné constitué de deux ouverts Ω_1 et Ω_2 séparés par une surface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Montrer qu'une fonction vectorielle de classe C^1 sur chaque morceau Ω_1 et Ω_2 admet une divergence faible dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si sa composante normale est continue à travers la surface Γ.

Correction. Soit σ une fonction de Ω à valeur vectorielle. On note σ_1, σ_2 les restrictions de σ à Ω_1 et Ω_2 respectivement et n^1, n^2 les normales extérieures de Ω_1 et Ω_2. Soit $\varphi \in c_c^\infty(\Omega)$, d'après la formule de Stokes (voir exercice),

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma(x).\nabla\varphi(x)dx &= \int_{\Omega_1} \sigma_1(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2(x).\nabla\varphi(x)dx \\ &= \int_\Gamma \sigma_1(x).n^1(x)\varphi(x)ds - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\sigma_1)(x)\varphi(x)dx \\ &\quad + \int_\Gamma \sigma_2.n^2(x)\varphi(x)ds - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\sigma_2)(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Si σ possède une divergence faible, il existe donc w tel que

$$\int_\Gamma (\sigma_1 - \sigma_2)(x).n^1(x)\varphi ds = \int_\Omega w(x)\varphi dx,$$

et par un raisonnement similaire à celui effectué dans l'exercice précédent, on en déduit que $(\sigma_1 - \sigma_2).n^1 = 0$ sur Γ.

4.3 Définition et principales propriétés

Exercice 4.3.1 Montrer que les fonctions continues, C^1 par morceaux et à support borné dans $\overline{\Omega}$, appartiennent à $H^1(\Omega)$.

Correction.

1. Cas $N = 2$

Soit α, $0 < \alpha < 1/2$. On définit u la fonction définie sur la boule unité de $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x) = |\log(|x|)|^\alpha = (\log(|x|^2)/2)^\alpha.$$

On a

$$\nabla u(x) = -\frac{\alpha x}{|x|^2} |\log(|x|)|^{\alpha-1}.$$

Ainsi,

$$\int_B |\nabla u|^2 dx \quad = \quad \int_B \left(\frac{\alpha \log(|x|)^{\alpha-1}}{|x|} \right)^2 dx$$

En passant en coordonnées polaire, on obtient

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u|^2 dx &= 2\pi\alpha^2 \int_0^1 \frac{\log(r)^{2(\alpha-1)}}{r} dr \\ &= 2\pi\alpha^2 \int_1^\infty s^{2(\alpha-1)} ds. \end{aligned}$$

La fonction u est un élément de $H^1(B)$ dès que cette dernière intégrale est finie, c'est à dire des que $2(\alpha - 1) < -1$ ou encore $\alpha < 1/2$. Enfin, si $\alpha > 0$, u n'est pas bornée.
2. Cas $N \geq 3$
Soit $0 < \beta < (N - 2)/2$. On pose

$$u(x) = |x|^{-\beta}.$$

On a

$$\nabla u = -\beta x |x|^{-(\beta+2)}$$

Soit S_n la surface de la sphère unité. On a

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u|^2 dx &= \beta^2 \int_B |\nabla u|^{-2(\beta+1)} dx \\ &= \beta^2 |S_n| \int_0^1 r^N r^{-2(\beta+1)} dr \\ &= \beta^2 \int_0^1 r^{-2\beta+N-3} dr. \end{aligned}$$

Ainsi u est élément de H^1 dès que $-2\beta + N - 3 > -1$, c'est à dire $\beta < (N - 2)/2$.

Exercice 4.3.2 Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $N = 2$, montrer que la fonction $u(x) = |\log(|x|)|^\alpha$ appartient à $H^1(B)$ pour $0 < \alpha < 1/2$, mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Si $N \geq 3$, montrer que la fonction $u(x) = |x|^{-\beta}$ appartient à $H^1(B)$ pour $0 < \beta < (N - 2)/2$, mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Correction. D'après l'Exercice **4.2.2**, les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux admettent une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire appartiennent à $H^1(\Omega)$.

Exercice 4.3.3 Le but de cet exercice est de montrer que le Théorème de trace **4.3.13** n'est pas vrai si l'ouvert Ω n'est pas régulier. Soit l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ défini par $0 < x < 1$ et $0 < y < x^r$ avec $r > 2$ (voir la Figure **4.2**). Soit la fonction $v(x) = x^\alpha$. Montrer que $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$, tandis que $v \in L^2(\partial\Omega)$ si et seulement si $2\alpha > -1$. Conclure. (On peut aussi montrer avec ce même exemple que le Théorème **4.3.5** de densité et la Proposition **4.4.2** de prolongement ne sont pas vrais pour un tel ouvert.)

Correction. On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v|^2 dxdy &= \int_\Omega x^{2\alpha} dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{x^r} x^{2\alpha} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x^{2\alpha+r} dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, $v \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $2\alpha + r > -1$. De plus, $\partial v/\partial y = 0$ et $\partial v/\partial x = \alpha x^{\alpha-1}$. On en déduit que $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $2(\alpha - 1) + r > -1$, c'est à dire $2\alpha + r > 1$. D'autre part,

$$\int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 ds = 1 + \int_0^1 x^{2\alpha}(1 + r^2 x^{2r-2})^{1/2} dx$$

Comme $r > 2$, la fonction $(1 + r^2x^{2r-2})^{1/2}$ est bornée sur $(0, 1)$ et $v \in L^2(\partial\Omega)$ si et seulement si $2\alpha > -1$. Si r est strictement supérieur à 2, il existe α tel que $1 - r < 2\alpha < -1$. Dans ce cas, $v \in H^1(\Omega)$ et $v_{|\partial\Omega} \notin L^2(\partial\Omega)$. Le Théorème **4.3.13, p.83** est mis en défaut dans ce cas. En effet, on introduit la suite croissante de fonctions continues

$$v^n(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } v(x) < n \\ v(x) = n & \text{si } v(x) \geq n. \end{cases}$$

La suite v^n converge vers v dans $H^1(\Omega)$ et $v^n|\partial\Omega$ converge presque partout vers $v^n|\partial\Omega$. On a alors

$$\lim_n \|v^n\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\lim_n \|v^n\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |v_{|\partial\Omega}(x)|^2 ds = +\infty.$$

Quel que soit $K > 0$, pour n assez grand, on a donc

$$\|v^n\|_{L^2(\partial\Omega)} > K\|v^n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Exercice 4.3.4 Le but de cet exercice est de montrer qu'il ne peut pas y avoir de notion de trace pour des fonctions de $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il n' existe pas de constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\|v_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour simplifier, on choisit comme ouvert Ω la boule unité. Construire une suite de fonctions régulières dans $\overline{\Omega}$ égales à 1 sur $\partial\Omega$ et dont la norme dans $L^2(\Omega)$ tend vers zéro. Conclure.

Correction.

Soit T une fonction régulière de $[0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $T(0) = 1$, $T(s) = 0$ pour $s > 1$ et $T(s) \leq 1$ pour tout s. On définit la suite u^n de fonction de la boule Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$u^n(x) = T(n(1 - |x|)).$$

Pour tout n, quel que soit $x \in \partial\Omega$, $|u^n(x)| = 1$. D'autre part, $|u^n(x)|$ est majorée par 1 pour tout $x \in \Omega$. Enfin, $u_n(x) = 0$ pour tout x appartenant à la boule de rayon $1 - 1/n$. Ainsi, d'après le théorème de Lebesgue, $\|u^n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, et quel que soit C, pour n assez grand,

$$\|u^n\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|u^0\|_{L^2(\partial\Omega)} > C\|u^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'opérateur trace définit de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap L^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ n'est pas continue et ne peut donc pas être prolongé sur $L^2(\Omega)$.