Chapitre 5

ETUDE MATHEMATIQUE DES PROBLEMES ELLIPTIQUES

5.1 Introduction

5.2 Etude du Laplacien

Exercice 5.2.1 A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un ouvert quelconque de l'espace $\mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega)$. Montrer en particulier que l'ajout d'un terme d'ordre zéro au Laplacien permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèse que Ω est borné.

Correction.
1er Étape. Recherche de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v nulle sur $\partial\omega$. Par intégration par parties, on obtient que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + u(x)v(x)dx = \int_\Omega fvdx.$$

Afin que cette expression ait un sens, il suffit de choisir u et v dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème variationnel associé à l'équation de convection-diffusion consiste donc à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + u(x)v(x)dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fvdx.$$

2eme Étape. Résolution du problème variationnel.

La continuité de $a(.,.)$ et $L(.)$ est évidente de même que la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$. En effet,

$$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont réunies. Il existe donc une solution unique au problème variationnel. On vérifie enfin en effectuant les même intégrations par parties que lors de la première étape que ∇u est un élément de $H(\text{div})$ et que

$$-\Delta u + u = f \text{ en tant qu'éléments de } L^2(\Omega).$$

Enfin, comme $u \in H^1_0(\Omega)$, et que Ω est un ouvert régulier, la trace de u est bien définie et $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$.

Exercice 5.2.2 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant de convection-diffusion

$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et V est une fonction régulière à valeurs vectorielles telle que $\text{div}V = 0$ dans Ω.

Correction.

1er Étape. Recherche de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v nulle sur $\partial\omega$. Par intégration par parties, on obtient la formulation variationnelle suivante :
Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1_0(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + (V.\nabla u)v dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

2ème Étape. Résolution du problème variationnel.

Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$.

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + (V.\nabla u)u dx$$

Or

$$\begin{aligned} \int_\Omega (V.\nabla u)u dx &= 1/2 \int_\Omega \text{div}(|u|^2 V) dx \\ &= 1/2 \int_{\partial\Omega} |u|^2 V.n ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega}$$

et la coercivité de $a(.,.)$ se déduit de l'inégalité de Poincaré.
3ème Étape. Équivalence avec l'équation.

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega fv - V.\nabla u.v dx.$$

Ainsi,

$$\left|\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx\right| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|V\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)})\|v\|_{L^2(\Omega)},$$

et ∇u est un élément de $H(\text{div})$. On en déduit donc par intégration par parties que

$$-\Delta u + u = f \text{ en tant qu'éléments de } L^2(\Omega).$$

Exercice 5.2.3 On reprend les notations et hypothèses de l'Exercice **5.2.2**. Montrer que tout $v \in H^1_0(\Omega)$ vérifie

$$\int_\Omega vV \cdot \nabla v\, dx = 0.$$

Montrer que la solution de la formulation variationnelle du problème de convection diffusion ne minimise pas dans $H^1_0(\Omega)$ l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + vV \cdot \nabla v\right) dx - \int_\Omega fv\, dx.$$

Correction. On a d'ores et déjà prouvé dans l'exercice précédent que

$$\int_\Omega vV.\nabla v dx = 0$$

pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J(v) &= 1/2\int_\Omega (|\nabla v|^2 + v.V.\nabla v)dx - \int fv dx \\ &= 1/2\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int fv dx \end{aligned}$$

Or le minimum u sur $H^1_0(\Omega)$ de J es solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et n'a donc aucune raison (sauf cas exceptionnel) d'être du problème aux limites

$$\begin{cases} V.\nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Exercice 5.2.4 On considère à nouveau le problème aux limites (**5.1**). On suppose que l'ouvert Ω est symétrique par rapport à l'hyperplan $x_N = 0$ de même que la donnée f (i.e. $f(x', x_N) = f(x', -x_N)$). Montrer que la solution de (**5.1**) a la même symétrie. Montrer que (**5.1**) est équivalent à un problème aux limites posé sur $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_N > 0\}$ avec une condition aux limites de Neumann sur $\Omega \cap \{x_N = 0\}$.

Correction. Soit u la solution de **(5.1), p.101**. On définit

$$v \in H^1(\Omega) \text{ par } v(x', x_n) = u(x', -x_n).$$

On a alors

$$-\Delta v(x', x_n) = -\Delta u(x', -x_n) = f(x', -x_n) = f(x', x_n).$$

En d'autres termes, v est également solution du problèmes aux limites (**5.1**). Comme u est l'unique solution de ce système, $u = v$ et $u(x', x_n) = u(x', -x_n)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On pose $\psi(x', x_n) = \psi(x', -x_n)$. On a

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\}), H^{1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\})} \\
&= \int_{\Omega^+} \Delta u \varphi dx + \int_{\Omega^+} \nabla u . \nabla \varphi dx \\
&= \int_{\Omega^+} f \varphi dx + \int_{\Omega^+} \nabla u . \nabla \varphi dx.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\}), H^{1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\})} \\
&= -\int_{\Omega^-} f \varphi dx + \int_{\Omega^-} \nabla u . \nabla \varphi dx \\
&= -\int_{\Omega^+} f \varphi dx + \int_{\Omega^+} \nabla u . \nabla \varphi dx
\end{aligned}$$

(par changement de variable $(x', x_n) \to (x', -x_n)$).

Or $\psi_{|\Omega\cap\{x_n=0\}} = \varphi_{|\Omega\cap\{x_n=0\}}$, ainsi,

$$\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\}), H^{1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\})} = -\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\}), H^{1/2}(\Omega\cap\{x_n=0\})}$$

et $\partial u / \partial n = 0$ sur $\Omega \cap \{x_n = 0\}$. Ainsi, u est également solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega^+ \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \{x_n > 0\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Omega \cap \{x_n = 0\}. \end{array} \right.$$

Exercice 5.2.5 Démontrer que l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (**5.18**) vérifie l'estimation d'énergie suivante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de u, f et g.

Correction.

Exercice 5.2.6 On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et g est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. On démontrera l'inégalité suivante (qui généralise celle de Poincaré)

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right) \ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Correction.
1er Étape. Recherche de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_\Omega f v dx.$$

Comme on ne peut inclure la condition au bord dans le choix de l'espace V, on doit l'utiliser dans l'expression de $a(.,.)$ et $L(.)$. On a donc

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (g-u) v ds = \int_\Omega f v dx.$$

La formulation variationnelle retenue consiste donc à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

ou

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u.v ds$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds..$$

2ème Étape. Résolution de problème variationnel.

Afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$. A cet effet, on va montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

La coercivité est alors évidente. Afin d'établir ce dernier résultat, on raisonne par contradiction : Supposons que pour tout n, il existe v_n tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} > n(\|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte a considérer la suite $v_n/\|v_n\|_{L^2(\Omega)}$ au lieu de v_n, on peut supposer que pour tout n, $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Ainsi, la suite v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$ et d'après le théorème de Rellich, il existe une sous suite $v_{n'}$ convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un élément v de $L^2(\Omega)$. De plus, $\nabla v_{n'}$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, $v_{n'}$ est une suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$, v appartient a $H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$. d'après un lemme du cours, on en déduit que v est une constante. Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi $v = 0$ dans tout Ω, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

3eme Étape. Équivalence avec le problème aux limites.

Tout d'abord, on établit en appliquant la formulation variationnelle a des éléments $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que ∇u est un élément de $H(\text{div})$ et par intégration par parties que

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

Comme f est un élément de $L^2(\Omega)$, on en déduit que u appartient a $H^2(\Omega)$. En utilisant cette fois des fonctions tests régulières quelconques, on obtient par intégration par parties que

$$\int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial n} + u).v ds = \int_{\partial\Omega} g v ds$$

(cette intégration par parties est licite car $\nabla u \in H^1(\Omega)$). Enfin, comme la trace des fonctions régulières est dense dans $l^2(\partial\Omega)$, on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = g \text{ presque partout sur } \partial\Omega.$$

Exercice 5.2.7 On suppose que Ω est un ouvert borné connexe. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec des conditions aux limites mélées

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \end{cases} \tag{5.4}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et $(\partial\Omega_N, \partial\Omega_D)$ est une partition de $\partial\Omega$ telle que les mesures superficielles de $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$ sont non nulles (voir la Figure **4.1**). (Utiliser la Remarque **4.3.18**.)

Correction.

La formulation variationnelle s'établit naturellement : Il s'agit de trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V$$

ou

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

Afin de montrer l'existence d'une solution unique, on applique le théorème de Lax-Milgram. La coercivité est établie à l'aide de l'inégalité de type Poincaré suivante : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in V$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cette inégalité s'établit par contradiction de manière classique. Enfin, l'équivalence du problème variationnel et aux limites ne pose pas de problème particulier.

Exercice 5.2.8 Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (**5.28**).

Correction.

Exercice 5.2.9 On suppose que Ω est un ouvert borné connexe régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \left(\int_\Omega u \, dx\right)\left(\int_\Omega v \, dx\right) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle. Quel problème aux limites a-t-on ainsi résolu ? En particulier, si on suppose que $\int_\Omega f \, dx = 0$, quel problème déjà étudié retrouve-t-on ?

Correction.

<u>1. Existence</u>

Soit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \left(\int_\Omega u dx\right)\left(\int_\Omega v dx\right) \tag{5.5}$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Le problème variationnel posé consiste à déterminer $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ En raisonnant par l'absurde (comme lors de la deuxième démonstration de l'inégalité de Poincaré **4.3.10 p. 85**), on établit qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C a(u,u)$$

(On utilise ici le fait que Ω est borné). Le Théorème de Lax-Milgram nous assure alors l'existence et l'unicité de la solution de 5.5.

<u>2. Détermination du problème aux limites</u>

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi(x)dx = -\left(\int_\Omega u(x)dx\right)\left(\int_\Omega \varphi(x)dx\right) + \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Shwarz,

$$\left|\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi(x)dx\right| \leq \left(|\Omega|^{1/2}\left|\int_\Omega udx\right| + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, $\nabla u \in H(\mathrm{div})$ et

$$-\mathrm{div}(\nabla u) = f - \int_\Omega udx \text{ dans } \Omega.$$

Enfin, comme $\nabla u \in H(\mathrm{div})$, la trace de $\partial u/\partial n$ sur la frontière de Ω est correctement définie et on établit aisément que $\partial u/\partial n = 0$. Le problème aux limites résolu consiste donc à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f - \displaystyle\int_\Omega udx & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans le cas particulier $f = 0$, en appliquant la formulation variationnelle à la fonction test $\varphi = 1$, on en déduit que

$$\int_\Omega u(x)dx = 0$$

et que u est solution du problème de Neumann **(5.25), p.112**.

Exercice 5.2.10 Montrer que si $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ et $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ sont solutions de (**5.35**) avec (**5.36**) et $u_i = 0$ sur $\partial\Omega$, pour $i = 1, 2$, alors la fonction u définie comme u_i dans Ω_i, $i = 1, 2$, est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de (**5.33**).

Correction.

Tout d'abord, la fonction ainsi définie est bien un élément de H_0^1. En effet, u est continue et les restrictions de u à Ω_1 et Ω_2 appartiennent respectivement à $H^1(\Omega_1)$ et $H^1(\Omega_2)$. D'après le Lemme **4.3.19, p.86**, u est donc un élément de $H^1(\Omega)$. Enfin, $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Notons que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\nabla u(x) = \{\nabla u_1(x) \text{ si } x \in \Omega_1 \nabla u_2(x) \text{ si } x \in \Omega_2.\}$$

Soit v un élément de $H_0^1(\Omega)$. On introduit v_1 et v_2 les restrictions de v à Ω_1 et Ω_2.

$$\int_{\Omega_1} k_1\nabla u_1.\nabla v_1 dx = \int_\Omega f v_1 dx + \int_\Gamma k_1 \nabla u_1.n dx$$

et
$$\int_{\Omega_2} k_2 \nabla u_2 . \nabla v_2 dx = \int_{\Omega} f v_2 dx - \int_{\Gamma} k_2 \nabla u_2 . n dx$$
Par sommation, on obtient
$$\int_{\Omega} A \nabla u . \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$
les deux termes de flux sur l'interface Γ se compensant. On en déduit que $A\nabla u$ est un élément de $H(\mathrm{div})$ et que
$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ en tant qu'éléments de } L^2(\Omega).$$
On a donc prouver que u est l'unique solution de **(5.33), p.115**.

Exercice 5.2.11 Montrer l'existence et l'unicité de la solution de
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
avec $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Correction. La formulation variationnelle consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que
$$a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega)$$
ou
$$a(u, v) = \int_{\Omega} A\nabla u . \nabla v + uv dx$$
et
$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds.$$
L'existence d'une solution à ce problème découle d'une application aisée du théorème de Lax-Milgram. Enfin, le Lemme **5.2.13, p.110** reste valable pour un opérateur elliptique du deuxième ordre à coefficients variables, pourvu que A soit suffisamment régulier. En particulier, si pour tout i et j, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $u \in H^2(\Omega)$. Ainsi, on obtient que
$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ en tant qu'éléments de } L^2(\Omega),$$
que la trace $\frac{\partial u}{\partial n_A}$ est bien définie sur $\partial\Omega$ et que
$$\frac{\partial u}{\partial n_A} = g \text{ dans } L^2(\partial\Omega).$$

Exercice 5.2.12 Soit Ω un ouvert borné et K un compact connexe de $\mathbb{R}^N$ inclus dans Ω (on suppose que $\Omega \setminus K$ est régulier). Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère un problème de conduction dans Ω où K est une inclusion parfaitement conductrice, c'est-à-dire que l'inconnue u (la température ou le potentiel électrique, par exemple) est constante dans

K (cette constante est aussi inconnue). On suppose qu'il n'y a pas de terme source dans K. Ce problème se modélise par

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ u = C & \text{sur } \partial K \\ \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 & \text{sur } \partial K \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où C est une constante inconnue à déterminer. Trouver une formulation variationnelle de ce problème aux limites et démontrer l'existence et l'unicité d'une solution (u, C).

Correction. On introduit l'espace vectoriel

$$X = \{u \in H^1(\Omega - K) : \ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \ ; \ v = \text{constante sur } \partial K\}.$$

muni de la norme de $H^1(\Omega - K)$. Notons que X est un espace de Hilbert. En effet, c'est un sous espace fermé de $H^1(\Omega - K)$.

1ere Étape. Détermination de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation vérifiée par u sur $\Omega - K$ par un élément v de X. Par intégration par parties, on en déduit que

$$\int_{\Omega-K} \nabla u.\nabla v(x)dx + \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds = \int_{\Omega-K} f(x)v(x)dx \tag{5.6}$$

Comme $v(x)$ est constante sur ∂K, on a

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds = \left(\int_{\partial K} \frac{\partial u}{d} s\right) v(\partial K).$$

Enfin, d'après l'équation vérifiée par $\partial u/\partial n$ sur ∂K,

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds = 0.$$

L'équation 5.6 vérifiée par u se simplifie en

$$\int_{\Omega-K} \nabla u.\nabla v(x)dx = \int_{\Omega-K} f(x)v(x)dx.$$

La formulation variationnelle associée au problème aux limites consiste à trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \tag{5.7}$$

où $a(.,.)$ est la forme bilinéaire définie sur X par

$$a(u, v) = \int_{\Omega-K} \nabla u.\nabla v(x)dx$$

et $L(.)$ la forme linéaire

$$L(v) = \int_{\Omega-K} f(x)v(x)dx.$$

2eme Étape. Existence de solution.

L'application du Théorème de Lax-Milgram est triviale et nous assure l'existence et l'unicité au problème variationnel 5.7.

3eme Étape. Équivalence avec le problème aux limites.

On applique dans un premier temps la formulation variationnelle à une fonction $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega - K)$. On en déduit que $\nabla u \in H(\text{div})$ et que

$$-\Delta u = f \text{ pour presque tout } x \in \Omega - K.$$

Comme $\nabla u \in H(\text{div})$, $\partial u/\partial n$ admet une trace (au moins au sens faible sur ∂K). En appliquant la formulation variationnelle à un élément quelconque v de X, on en déduit que

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}(x)dx = 0 \text{ sur } \partial K.$$

Enfin, les conditions de type Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $u = C$ sur ∂K ont été incluses dans la définition de l'espace X auquel appartient u.

Exercice 5.2.13 Montrer que l'application (non-linéaire) $v \to v^+$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, ainsi que de $H^1(\Omega)$ dans lui-même (utiliser le fait que $\nabla u = 0$ presque partout sur l'ensemble $u^{-1}(0)$).

Correction.

La continuité de l'application $v \to v^+$ de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est évidente, car Lipschitzienne. En effet, pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\|v^+ - u^+\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

La continuité de cette application de $H^1(\Omega)$ dans lui même est un peu plus délicate. Considérons une suite v_n convergeant vers v dans $H^1(\Omega)$. Soit $v_{n'}$ une sous-suite extraite quelconque de v_n. De cette sous suite, on peut extraite une nouvelle sous-suite $v_{n''}$ convergeant presque partout. On a

$$\begin{aligned}
\|\nabla v_{n''}^+ - \nabla v^+\|_{L^2(\Omega)} =& \|1_{v_{n''}>0}\nabla v_{n'} - 1_{v>0}\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
\leq& \|1_{v_{n''}>0}(\nabla v_{n'} - \nabla v)\|_{L^2(\Omega)} + \|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
\leq& \|\nabla v_{n''} - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Il est claire que le premier terme du second membre converge vers zéro. Enfin,

$$\|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega - v^{-1}(0)} (1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})^2 |\nabla v|^2 dx.$$

car $\nabla v = 0$ sur presque partout sur $v^{-1}(0)$. Comme l'application $x \to 1_x$ est continue sur $\mathbb{R} - 0$,

$$1_{v_{n''}>0}(x) \to 1_{v>0}(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega - v^{-1}(0).$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\|(1_{v_{n''}>0} - 1_{v>0})\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } n'' \to 0$$

et

$$\nabla v_{n''}^{+} \to \nabla v^{+} \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On en déduit que toute la suite ∇v_n^+ converge vers ∇v^+. En effet, dans le cas contraire, il existerait un réel $\varepsilon > 0$, et une sous-suite $v_{n'}$ de v_n tels que

$$\|\nabla v_{n'}^{+} - \nabla v^{+}\|_{L^2(\Omega)} > \varepsilon.$$

Ce qui contredit le fait qu'on puisse construire une sous-suite $v_{n''}$ de $v_{n'}$ telle que $\nabla v_{n''}^{+} \to \nabla v^{+}$ dans $L^2(\Omega)$. En conclusion, on a montré que si $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, alors $v_n^+ \to v^+$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla v_n^+ \to \nabla v^+$ dans $L^2(\Omega)$. En d'autres termes, $v_n^+ \to v^+$ dans $H^1(\Omega)$, et l'application qui à v associe v^+ est continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

5.3 Résolution d'autres modèles

Exercice 5.3.1 Montrer que l'application de $L^2(\Omega)^N$ dans $H_0^1(\Omega)^N$ qui à f fait correspondre u, l'unique solution faible de (**5.53**), est linéaire continue.

Correction.
La linéarité de cette application est évidente. La continuité est une conséquence du Théorème de Lax-Milgram (qu'on a appliqué pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de **(5.53), p.127**). On peut retrouver la continuité directement, en appliquant la formulation variationnelle à la fonction test $v = u$. On obtient

$$\int_\Omega |e(u)|^2 + |\text{div} u[^2 dx = \int_\Omega f.u dx.$$

En combinant cette égalité à l'inégalité

$$C\int_\Omega |e(u)|^2 + |\text{div} u[^2 dx \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

et à l'inégalité de Cauchy-Shwarz, on en déduit que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 5.3.2 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$. Soit l'ensemble $\mathcal{R}$ des "mouvements rigides" de Ω défini par

$$\mathcal{R} = \left\{ v(x) = b + Mx \text{ avec } b \in \mathbb{R}^N, M = -M^t \text{ matrice antisymétrique } \right\}. \quad (5.8)$$

Montrer que $v \in H^1(\Omega)^N$ vérifie $e(v) = 0$ dans Ω si et seulement si $v \in \mathcal{R}$.

Correction. Soit $v \in H^1(\Omega)^N$ telle que $e(v) = 0$. On pose $w = \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla v^T)$, partie antisymétrique de ∇v,

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

La fonction w_{ij} est un élément de $L^2(\Omega)$ et ses dérivées $\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k}$ sont des éléments de $H^{-1}(\Omega)$ (voir Définition **4.4.10, p.96**). On vérifie aisément que

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial x_i}.$$

Comme $e(v) = 0$, on en déduit que pour tout k,

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = 0.$$

Ainsi, pour tout w_{ij} admet une dérivée faible L^2 et d'après le Lemme **4.2.5, p.76** , il existe une matrice M telle que $w_{ij}(x) = M$ presque partout. De plus, w étant antisymétrique, M l'est également. On en déduit que

$$\nabla v = M.$$

Enfin,

$$\nabla(v - M.x) = 0.$$

De nouveau par application du Lemme **4.2.5**, on en déduit qu'il existe une constante b telle que

$$v(x) = b + M.x \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Exercice 5.3.3 Montrer que $u \in V$ est l'unique solution de la formulation variationnelle (**5.61**) si et seulement si u réalise le minimum sur V de l'énergie $J(v)$ définie par (**5.64**). (Indication : on pourra s'inspirer de la Proposition **3.3.4**).

Correction.

Exercice 5.3.4 Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$. On considère le système de l'élasticité avec la condition de Neumann (**5.56**) sur tout le bord $\partial\Omega$. Montrer que la condition d'équilibre (vectorielle)

$$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,ds = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité d'une solution dans $H^1(\Omega)^N$ (l'unicité étant obtenue "à un mouvement de corps rigide" près, c'est-à-dire à l'addition de $Mx + b$ près avec $b \in \mathbb{R}^N$ et M une matrice antisymétrique constante).

Correction.
En intégrant l'équation sur Ω, on obtient suite à une intégration par parties la condition de compatibilité

$$\int_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0.$$

Sous cette condition, on va montrer que le problème aux limites avec conditions de Neumann admet une unique solution dans l'espace V, quotient de $H^1(\Omega)^N$ par l'espace des mouvements rigides $\mathcal{R}$. La formulation variationnelle est aisée à établir et consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V$$

ou

$$a(u,v) = \int_\Omega 2\mu e(u)e(v) + \lambda(\text{div}u)(\text{div}v)dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f.vdx + \int_{\partial\Omega} g.v$$

Le seul point délicat afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram consiste à prouver la coercivité de la forme bilinéaire, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_V^2 \leq Ca(u,u) \text{ pour tout } u \in V. \tag{5.9}$$

où

$$\|u\|_V = inf_{M,b}\|u + M.x + b\|_{H^1(\Omega)}, \text{ avec } M \text{ matrice antisymétrique et } b \in \mathbb{R}^n.$$

Supposons que la relation (5.9) soit fausse pour tout C. Dans ce cas, il existe une suite u_n d'éléments de V telle que

$$1 = \|u_n\|_V^2 \geq na(u_n,u_n).$$

Rappelons qu'il existe ν tel que

$$a(u,u) \geq \nu\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}..$$

Ainsi,

$$1 = \|u_n\|_V^2 \geq \nu n\|e(u_n)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

D'après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite $u_{n'}$ convergente dans $L^2(\Omega)$ quotienté par $\mathcal{R}$. De plus, comme $e(u_{n'}, u_{n'})$ tend vers zéro, on en déduit que $u_{n'}$ converge dans V vers un élément u tel que $e(u) = 0$. D'après l'exercice précédent, il existe M matrice antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^N$ tels que $u(x) = M.x + b$. En d'autres termes, $u = 0$ dans V, ce qui contredit le fait que $\|u\|_V = 0$. Afin de prouver que la solution du problème variationnel est solution du problème aux limites, on procède comme pour le Laplacien. En particulier, afin de donner un sens à $\sigma.n$, il serait nécessaire de montrer que u est en fait un élément de $H^2(\Omega)$ (ce qu'on a admit pour le Laplacien). A défaut, on peut toujours utiliser le fait que σ est un élément de $H(\text{div})$ et utiliser la définition faible de la trace de la normale de σ sur le bord comme élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$(voir Théorème **4.4.7, p.94**)

Exercice 5.3.5 On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et que $f \in L^2(\Omega)^N$. Montrer l'existence et l'unicité de la solution de (**5.65**) dans $H^1_0(\Omega)^N$ sans utiliser l'inégalité de Korn. Vérifier qu'on peut affaiblir les hypothèses de positivité sur les coefficients de Lamé en supposant seulement que $\mu > 0$ et $3\mu + 2\lambda \geq 0$.

Correction. La formulation variationnelle consiste à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu\langle\nabla u, \nabla v\rangle + (\lambda+\mu)(\nabla.u)(\nabla.v)dx$$

et

$$L(v) = \int fvdx.$$

Afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$. Or

$$(\mathrm{div} u)^2 \leq 2|\nabla u|^2,$$

ainsi,

$$a(u,u) \geq \int_\Omega (\mu + \min(0, 2(\lambda+\mu)))|\nabla u|^2 dx$$

ou encore

$$a(u,u) \geq \int_\Omega \min(\mu, 2\lambda + 3\mu)|\nabla u|^2 dx.$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est donc coercive dès que $\mu > 0$ et $2\lambda + 3\mu > 0$, ce qui établit l'existence d'une solution unique au problème variationnel. On montre que u est solution du problème au limite en procédant comme pour le Laplacien.

Exercice 5.3.6 Vérifier l'équivalence de (**5.65**) et (**5.53**) si λ et μ sont constants. Montrer que (**5.65**) et (**5.53**) ne sont plus équivalents si λ et μ sont des fonctions (régulières), même si on remplace l'équation vectorielle de (**5.65**) par

$$-\mathrm{div}(\mu\nabla u) - \nabla((\mu+\lambda)\mathrm{div} u) = f \text{ dans } \Omega.$$

Correction. Soit u la solution du problème variationnel de l'élasticité linéarisée avec condition de Dirichlet, pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)^N$,

$$\int_\Omega \mu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \lambda(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v)dx = \int_\Omega f.vdx.$$

Or par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx &= -\int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dx \\
&= -\int_\Omega \mu u_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i} dx - \int_\Omega u_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \mu u_j}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx - \int_\Omega u_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\
&= \int_\Omega \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \int_\Omega u_j \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dx.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_\Omega \mu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \lambda(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v) dx =$$

$$\int_\Omega \mu \nabla u.\nabla v + (\lambda + \mu)(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v) dx + \int_\Omega u.((\mathrm{div} v)\nabla\mu - \nabla v^T \nabla\mu) dx.$$

Si μ est constant, u est donc également l'unique solution du problème variationnel consistant à trouver u dans $H_0^1(\Omega)^N$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$,

$$\int_\Omega \mu \nabla u.\nabla v + (\lambda + \mu)(\mathrm{div} u)(\mathrm{div} v) dx = \int_\Omega f v dx,$$

qui est équivalent au problème aux limites consistant à trouver u tel que

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - \nabla((\mu + \lambda)\mathrm{div} u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si de plus λ est constant, on retrouve le problème aux limites **(5.65), p.133**. Enfin, si μ n'est pas constant, on ne peut rien dire.

Exercice 5.3.7 Le but de cet exercice est de trouver une solution particulière du système de l'élasticité linéarisée dans le cas d'une force de cisaillement anti-plan. On considère un domaine cylindrique homogène Ω de longueur $L > 0$ et de section ω, où ω est un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^{N-1}$ (les coefficients de Lamé λ et μ sont constants). Autrement dit, $\Omega = \omega \times (0, L)$, et pour $x \in \Omega$, on note $x = (x', x_N)$ avec $0 < x_N < L$ et $x' \in \omega$. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(2\mu e(u) + \lambda\,\mathrm{tr}(e(u))\,\mathrm{Id}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma n = g & \text{sur } \partial\omega \times (0, L) \\ u' = 0 & \text{sur } \omega \times \{0, L\} \\ (\sigma n) \cdot n = 0 & \text{sur } \omega \times \{0, L\} \end{cases} \tag{5.10}$$

où on a utilisé la notation, pour un vecteur $v = (v_1, ..., v_N)$, $v = (v', v_N)$ avec $v' \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $v_N \in \mathbb{R}$. On suppose que la force surfacique g est du type "cisaillement anti-plan", c'est-à-dire que $g' = (g_1, ..., g_{N-1}) = 0$.

Montrer que la solution unique de (**5.66**) est donnée par $u = (0, ..., 0, u_N)$ où $u_N(x')$ est la solution du Laplacien suivant

$$\begin{cases} -\Delta' u_N = 0 & \text{dans } \omega \\ \mu\frac{\partial u_N}{\partial n} = g_N & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où Δ' est le Laplacien dans la variable $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Correction. Soit u_N la solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta' u_N = 0 & \text{sur } \omega \\ \mu\frac{\partial u_N}{\partial n} = g_N & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

On pose $u = (0, \cdots, 0, u_N)$. Pour tout i et j tels que $i, j < N$,

$$\begin{aligned} e_{ij}(u) &= 0 \\ e_{iN}(u) = e_{Ni}(u) &= \frac{1}{2}\frac{\partial u_N}{\partial x_i} \\ e_{NN}(u) &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, $\operatorname{tr}(e(u)) = 0$. On en déduit que,

$$-\operatorname{div}(2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u))\operatorname{Id}) = -\mu(0, \cdots, 0, \Delta' u_N) = 0.$$

De plus,

$$\sigma(u).e_N = 2\mu e(u).e_N = \mu(\nabla' u_N, 0).$$

Ainsi, pour presque tout $x \in \omega \times \{0, L\}$, $(\sigma n).n = 0$. Enfin, pour presque tout $x \in \partial\omega \times (0, L)$, $n = (n', 0)$ et

$$\sigma n = 2\mu \left(\sum_{k=1}^{N-1} e_{jk} n_k\right)_j = 2\mu(0, \cdots, 0, 1/2\nabla' u_N.n') = (0, \cdots, 0, g_N).$$

Ainsi, u est bien l'unique solution du problème aux limites (**5.66**).

Exercice 5.3.8 Généraliser l'Exercice **5.3.7** au cas d'une condition aux limites latérale du type

$$u' = 0 \text{ et } (\sigma n)\cdot e_N = g_N \text{ sur } \partial\omega \times (0, L).$$

Correction. La solution du problème de l'élasticité linéarisée n'est pas modifiée par le changement des conditions aux limites proposé sur $\partial\omega \times (0, L)$.

Exercice 5.3.9 A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des plaques

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.11}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On pourra remarquer que, si $u \in H_0^2(\Omega)$, alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 dx.$$

On admettra le résultat de régularité suivant : si $w \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ vérifient pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\int_\Omega w\Delta v \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

alors $(\theta w) \in H^2(\Omega)$ quelle que soit la fonction $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$.

Correction.

La formulation variationnelle associée à l'équation des plaques (**5.67**) consiste à déterminer $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H_0^2(\Omega) \tag{5.12}$$

(voir Exercice **3.2.4**). Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non trivialement vérifiée est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$. Or pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$, on établit suite à deux intégrations par parties successives que

$$a(u,u) = \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, l'ouvert Ω étant borné, il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx \right) = Ca(u,u).$$

La coercivité de $a(.,.)$ est donc établie. Il existe donc une unique solution au problème variationnel 5.12.

Reste à établir que la solution du problème variationnel est solution du problème aux limites. Soit K un compact de Ω et $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur K. Pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ à support inclus dans K,

$$\int_\Omega \theta(x)\Delta u(x)\Delta v(x) dx = \int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

D'après le résultat de régularité admit, $\theta\Delta u$ est un élément de $H^2(\Omega)$. Il est donc licite d'effectuer deux intégrations par parties successives sur le membre de gauche de l'équation précédente. On en déduit que

$$\int_\Omega \Delta(\theta(x)\Delta u(x))v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

En d'autres termes, pour presque tout $x \in K$,

$$\Delta(\Delta u)(x) = f(x).$$

Cette relation reste valable pour presque tout $x \in \Omega$: Il suffit de considéré une suite K_n de compacts tels que $\cup_n K_n = \Omega$. Enfin, comme $u \in H_0^2(\Omega)$, la solution du problème variationnel vérifie automatiquement les conditions au bord $u = \partial u / \partial n = 0$.

Exercice 5.3.10 Soit V l'espace des champs de vitesse à divergence nulle défini par (**5.70**). Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mu |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f \cdot v \, dx. \tag{5.13}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (**5.71**). Montrer que u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que $J(u) = \min_{v\in V} J(v)$. Réciproquement, montrer que, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (**5.71**).

Correction. Il suffit d'appliquer la Proposition **3.3.4, p.69** à la formulation variationnelle **(5.71), p.135** pour conclure.

Exercice 5.3.11 Le but de cet exercice est de trouver une solution particulière des équations de Stokes dans un canal rectiligne de section uniforme, appelée profil de Poiseuille. Soit $\Omega = \omega \times (0, L)$ où $L > 0$ est la longueur du canal et ω sa section, un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^{N-1}$. Pour $x \in \Omega$, on note $x = (x', x_N)$ avec $0 < x_N < L$ et $x' \in \omega$. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \nabla p - \mu\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \text{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, L) \\ pn - \mu\frac{\partial u}{\partial n} = p_0 n & \text{sur } \omega \times \{0\} \\ pn - \mu\frac{\partial u}{\partial n} = p_L n & \text{sur } \omega \times \{L\} \end{cases} \tag{5.14}$$

où p_0 et p_L sont deux pressions constantes. Montrer que la solution unique de (**5.76**) est donnée par

$$p(x) = p_0 + \frac{x_N}{L}(p_L - p_0),$$

et $u = (0, ..., 0, u_N)$ où u_N est la solution du Laplacien suivant

$$\begin{cases} -\mu\Delta' u_N = -\frac{(p_L - p_0)}{L} & \text{dans } \omega \\ u_N = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où Δ' est le Laplacien dans la variable $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Correction. On pose

$$p(x) = p_0 + x_N(p_L - p_0)/L,$$

et $u = (0, \cdots, 0, u_N)$ où u_N est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\mu\Delta' u_N = -\frac{(p_L - p_0)}{L} & \text{dans } \omega \\ u_N = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

On va montrer que (u, p) est solution du problème aux limites (**5.76**). On a

$$\nabla p = (0, \cdots, 0, (p_L - p_0)/L),$$

$$\Delta u = (0, \cdots, 0, \Delta' u_N),$$

d'où

$$\nabla p - \mu\Delta u = (0, \cdots, 0, (p_L - p_0)/L - \mu\Delta' u_N) = 0.$$

De plus,

$$\text{div}(u) = \frac{\partial u_N}{\partial x_N} = 0.$$

Enfin, comme $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, et $p = p_0$ sur $\omega \times \{0\}$, $p = p_1$ sur $\omega \times \{L\}$, les conditions aux limites imposées aux extrémités du profil sont également vérifiées.

Exercice 5.3.12 Généraliser l'Exercice **5.3.11** au cas des équations de Navier-Stokes (**5.69**).

Correction. Avec les mêmes notations que l'exercice précédent,

$$(u.\nabla)u = 0,$$

ainsi, u vérifie également les équations de Navier-Stokes.