

Chapitre 6

METHODE DES ELEMENTS FINIS

6.1 Approximation variationnelle

6.2 Éléments finis en dimension $N = 1$

Exercice 6.2.1 Appliquer la méthode des éléments finis P_1 au problème

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases}$$

Vérifier que les conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes apparaissent dans le second membre du système linéaire qui en découle.

Correction. La formulation variationnelle, issue de l'utilisation des éléments finis P_1 consiste à déterminer $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_0^1 u_h' v_h' dx = \int_0^1 f v_h dx \text{ pour toute fonction } v_h \in V_{0h},$$

et

$$\begin{aligned} u_h(0) &= \alpha \\ u_h(1) &= \beta. \end{aligned}$$

En utilisant ϕ_j comme fonction test, on obtient à l'aide de la formulation variationnelle que pour tout $0 < j < n + 1$,

$$\sum_{i=0}^{n+1} (u_h)_i \left(\int_0^1 \phi_i' \cdot \phi_j' dx \right) = \int f \phi_j dx.$$

Les conditions aux limites impliquent que $(u_h)_0 = \alpha$ et $(u_h)_{n+1} = \beta$, ainsi

$$\sum_{i=1}^n (u_h)_i \left(\int_0^1 \phi_i' \cdot \phi_j' dx \right) = \int f \phi_j dx - \int_0^1 (\alpha \phi_0' + \beta \phi_{n+1}') \phi_j' dx.$$

Déterminer $U_h = ((u_h)_i)_{1 \leq i \leq n}$ consiste donc à résoudre le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où la matrice \mathcal{K}_h est identique à celle obtenue avec des conditions de Dirichlet homogènes, tandis que le second membre est défini par

$$\begin{aligned} (b_h)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \phi_i dx, & \text{pour tout } 1 < i < n, \\ (b_h)_1 &= \alpha/h + \int_0^{x_2} f \phi_1 dx \\ (b_h)_n &= \beta/h + \int_{x_{n-1}}^1 f \phi_n dx. \end{aligned}$$

Exercice 6.2.2 On reprend le problème de Neumann (6.9) en supposant que la fonction $a(x) = 0$ dans Ω . Montrer que la matrice du système linéaire issu de la méthode des éléments finis P_1 est singulière. Montrer qu'on peut néanmoins résoudre le système linéaire si les données vérifient la condition de compatibilité

$$\int_0^1 f(x) dx = \alpha - \beta,$$

et que cette condition est préservée si l'on utilise des formules de quadrature. Comparer ce résultat avec le Théorème 5.2.18.

Correction. Le système linéaire obtenu en considérant $a = 0$ est

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où

$$\mathcal{K}_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et b_h est défini comme dans le cas $a \neq 0$. L'application \mathcal{K}_h n'est pas surjective, en effet, son image est incluse dans l'orthogonal du vecteur $(1, \dots, 1)$. La matrice \mathcal{K}_h est donc singulière. Considérons l'application linéaire A_h , restriction de \mathcal{K}_h à $(1, \dots, 1)^\perp$. On vérifie aisément que l'application A_h est auto-adjointe, définie positive. Ainsi, l'image de \mathcal{K}_h est exactement l'orthogonal de $(1, \dots, 1)$ et la condition de compatibilité est $b_h \in (1, \dots, 1)^\perp$, c'est à dire

$$\sum_{i=0}^{n+1} (b_h)_i = 0.$$

D'après l'expression de b_h , cette condition est équivalent à

$$\int_0^1 f(x) dx + \beta - \alpha = \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \beta - \alpha = \sum_{i=0}^{n+1} (b_h)_i = 0.$$

Exercice 6.2.3 Appliquer la méthode des différences finies (voir le Chapitre 2) au problème de Dirichlet (6.8). Vérifier qu'avec un schéma centré d'ordre deux, on obtient un système linéaire à résoudre avec la même matrice \mathcal{K}_h (à un coefficient multiplicatif près) mais avec un second membre b_h différent. Même question pour le problème de Neumann (6.9).

Correction. La méthode des différences finies, basée sur un schéma centré d'ordre 2, nous conduit à résoudre, dans le cas du Laplacien avec conditions de Dirichlet, le système

$$\begin{cases} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h} = hf(x_i) \text{ pour tout } 0 < i < n + 1, \\ u_0 = 0, \\ u_{n+1} = 0. \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = (hf(x_i)).$$

Le second membre diffère donc de celui obtenu par la méthode des éléments finis (défini par intégration). Remarquons cependant que dans la pratique, le second membre du système issu de l'analyse par éléments finis doit être calculer de manière approchée par une formule d'intégration numérique.

Pour le problème de Neumann, la matrice du système obtenu par différences finies diffère en général de celle obtenue par éléments finis, sauf dans le cas $a = 0$. Par contre, le second membre est modifié dans tous les cas. Aussi, dans le cas $a = 0$, la condition de compatibilité n'est a priori pas préservée par la discrétisation! La méthode des éléments finis nous conduits à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h} + ha(x_i) = hf(x_i) \text{ pour tout } 0 < i < n + 1, \\ u_1 - u_0 = h\alpha \\ u_{n+1} - u_n = h\beta. \end{cases}$$

Exercice 6.2.4 On considère $(n + 2)$ masses ponctuelles (alignées) situées aux points $x_j = j/(n + 1)$ pour $0 \leq j \leq n + 1$ et reliées entre voisines par des ressorts de même raideur $k > 0$. On applique à chaque masse ponctuelle une force longitudinale f_j . Dans l'hypothèse de petits déplacements (longitudinaux) écrire l'énergie totale du système qu'il faut minimiser (on discutera le cas des extrémités libres ou fixées). Interpréter la recherche de la position d'équilibre du système en termes d'éléments finis.

Correction. On note M_j les coordonnées de masse j et u_j son déplacement de la masse j . On a $M_j = (j\Delta x, u_j)$ où $\Delta x = 1/(n + 1)$ d'où

$$M_j M_{j+1} = (\Delta x, u_{j+1} - u_j).$$

L'allongement du ressort situé entre les masses j et $j + 1$ est

$$\delta L_j = ((\Delta x)^2 + (u_{j+1} - u_j)^2)^{1/2} - \Delta x.$$

Si on suppose que $(u_{j+1} - u_j)/\Delta x$ est petit, on obtient par développement limité que

$$\delta L_j \simeq \frac{1}{2} \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{\Delta x}.$$

L'énergie élastique du système est donc

$$\sum_{j=0}^n \frac{k}{2} \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{\Delta x}.$$

D'autre part, le travail des forces appliquées est $\sum_{j=0}^{n+1} u_j f_j$. Ainsi, l'énergie totale est

$$J(u) = \sum_{j=0}^n \frac{k}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 \Delta x - \sum_{j=0}^{n+1} u_j f_j.$$

Si les deux extrémités sont fixées, l'énergie est à minimiser sur l'ensemble des vecteurs u tel que $u_0 = u_{n+1} = 0$. Si uniquement l'une des extrémités (par exemple x_0), l'espace de minimisation est l'ensemble de u tels que $u_0 = 0$. Si aucune extrémité n'est fixée, l'espace de minimisation n'a pas à être contraint. Par contre, l'existence d'un minimiseur n'est assurée que si la condition de compatibilité

$$\sum_{j=0}^{n+1} f_j = 0$$

est vérifiée.

Il y a une forte similitude entre le problème obtenu est la résolution de l'équation

$$-\Delta u = f$$

par élément éléments finis P_1 , qui consiste à minimiser l'énergie

$$I(u) = \|\nabla u\|_{L^2(0,1)}^2 - \int_0^1 f(x)u(x)dx$$

sur l'espace de discrétisation V_h . Soit u_h un élément de V_h et U_h les coordonnées de u_h dans la base classique de V_h . On a alors

$$I(u_h) = \sum_{j=0}^n \frac{k}{2} (U_{h,j+1} - U_{h,j})^2 \Delta x - \sum_{j=0}^{n+1} \left(\int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx \right) U_{h,j}.$$

Ainsi, l'énergie $I(u_h)$ associée a la résolution du Laplacien ne diffère de $J(U_h)$ que par le terme du au travail des forces extérieures. Cependant, si f est régulière et n assez grand, la différence entre ces deux termes est petite.

Exercice 6.2.5 Démontrer l'équivalent du Théorème **6.2.6** de convergence pour le problème de Neumann **(6.9)**.

Correction. La démonstration est identique mot pour mot à celle effectuée dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet. L'opérateur d'interpolation r_h utilisé est identique. Dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet, on utilise en fait sa restriction à $H_0^1(\Omega)$ qui est valeur dans $H_0^1(\Omega) \cap V_h$, ce qui constitue l'unique différence.

Exercice 6.2.6 En généralisant les arguments précédents, démontrer le Théorème 6.2.14.

Correction.

Exercice 6.2.7 Calculer explicitement la matrice de rigidité \mathcal{K}_h pour (6.36).

Correction.

6.3 Éléments finis en dimension $N \geq 2$

Exercice 6.3.1 Soit \mathcal{T}_h un maillage de $\bar{\Omega}$ pour Ω ouvert simplement connexe polygonal de \mathbb{R}^2 . On note n_t le nombre de triangles de \mathcal{T}_h , n_c le nombre de faces ou cotés des triangles (un coté commun à deux triangles n'est compté qu'une seule fois), n_s le nombre de sommets du maillage, et n_{0s} le nombre de sommets intérieurs du maillage (qui ne sont pas sur $\partial\Omega$). Démontrer les relations, dites d'Euler, $n_t + n_s = n_c + 1$ et $3n_t + n_s = 2n_c + n_{0s}$.

Correction. A faire.

Exercice 6.3.2 Soit K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. Montrer que tout polynôme $p \in P_1$ se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x),$$

où les $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ sont les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$.

Correction. Soit p un polynôme de degré un et K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. Comme $x = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) a_j$, et que l'application qui à x associe $p(x) - p(0)$ est linéaire, on a

$$p(x) - p(0) = \left(\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) p(a_j) \right) - \left(\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) \right) p(0).$$

Comme $\sum_j \lambda_j = 1$, on en déduit que

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) p(a_j).$$

Exercice 6.3.3 Soit K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$.

Soit $(a_{jj'})_{1 \leq j < j' \leq N+1}$ les points milieux des arêtes de K définis par leur coordonnées barycentriques

$$\lambda_j(a_{jj'}) = \lambda_{j'}(a_{jj'}) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_l(a_{jj'}) = 0 \text{ pour } l \neq j, j'.$$

Vérifier que Σ_2 est précisément constitué des sommets et des points milieux des arêtes et que tout polynôme $p \in P_2$ se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x) (2\lambda_j(x) - 1) + \sum_{1 \leq j < j' \leq N+1} 4p(a_{jj'}) \lambda_j(x) \lambda_{j'}(x),$$

où les $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ sont les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$.

Correction. Soit q_1 et q_2 les polynômes de \mathbb{R}^{N+1} , de degré 2 défini par

$$q_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}) = p\left(\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j a_j\right) - p(0) \left(1 - \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j\right)$$

et

$$q_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j (2\lambda_j - 1) + \sum_{1 \leq j < j' \leq N+1} 4p(a_{jj'}) \lambda_j \lambda_{j'}.$$

Soit e_j la base canonique de \mathbb{R}^{N+1} , pour tout $j \leq N+1$, on a

$$q_1(e_j) = p(a_j) = q_2(e_j)$$

et pour tout $1 \leq j < j' \leq N+1$,

$$q_1((e_j + e_{j'})/2) = p(a_{jj'}) = q_2((e_j + e_{j'})/2).$$

De plus, $q_1(0) = 0 = q_2(0)$. Ainsi, le polynôme $q_1 - q_2$ s'annule en $N+2 + N(N+1)/2$ points distincts. On en déduit que $q_1 = q_2$. Enfin, comme $\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1$,

$$\begin{aligned} p(x) &= q_1(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{N+1}(x)) \\ &= q_2(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{N+1}(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x) (2\lambda_j(x) - 1) + \sum_{1 \leq j < j' \leq N+1} 4p(a_{jj'}) \lambda_j(x) \lambda_{j'}(x). \end{aligned}$$

Exercice 6.3.4 Soit \mathcal{T}_h un maillage de $\bar{\Omega}$ pour Ω ouvert simplement connexe polygonal de \mathbb{R}^2 . On note n_t le nombre de triangles de \mathcal{T}_h , n_c le nombre de faces ou cotés des triangles (un coté commun à deux triangles n'est compté qu'une seule fois), n_s le nombre de sommets du maillage, et n_{0s} le nombre de sommets intérieurs du maillage. Montrer que les dimensions des espaces V_h et V_{0h} sont

$$\dim V_h = \frac{k(k-1)}{2} n_t + k n_s - k + 1, \quad \dim V_{0h} = \frac{k(k+1)}{2} n_t - k n_s + k + 1.$$

Correction. Pour un treillis d'ordre k , on compte $(k+1)(k+2)/2$ éléments, dont $3k$ sur le bord du triangle. En particulier, un treillis d'ordre k compte $(k+1)(k+2)/2 - 3k = (k-1)(k-2)/2$ points "internes", $3(k-1)$ points situés à l'intérieur des arêtes et 3 aux sommets.

La dimension de V_h est égale au nombre total de degrés de liberté. A l'intérieur de chaque triangle, on compte $(k-1)(k-2)/2$ degrés de liberté soit $n_t(k-1)(k-2)/2$, auxquels il faut ajouter les degrés de liberté situés à l'intérieur des arêtes, soit $(k-1)n_c$ degrés de liberté et les n_s sommets du maillage. Au total,

$$\dim(V_h) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}n_t + (k-1)n_c + n_s$$

D'après la première formule d'Euler (voir Exercice 6.3.1), $n_c = n_t + n_s - 1$. Ainsi,

$$\dim(V_h) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}n_t + (k-1)n_t + kn_s + (1-k) = \frac{(k-1)k}{2}n_t + kn_s + 1 - k.$$

Le nombre de degrés de liberté de V_{0h} est égal à celui de V_h , auquel il faut soustraire les degrés de liberté situés sur le bord du domaine $\partial\Omega$ qui en compte $k(n_s - n_{0s})$. On a donc

$$\dim(V_{0h}) = \frac{(k-1)k}{2}n_t + kn_s + 1 - k - k(n_s - n_{0s}) = \frac{(k-1)k}{2}n_t + kn_{0s} + 1 - k.$$

D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} n_{0s} &= 3n_t + n_s - 2n_c \\ &= 3n_t + n_s - 2(n_t + n_s - 1) \\ &= n_t - n_s + 2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\dim(V_{0h}) = \frac{(k-1)k}{2}n_t + kn_t - kn_s + 1 + k = \frac{(k+1)k}{2}n_t - kn_s + 1 + k.$$

Exercice 6.3.5 Démontrer la formule (6.44) en dimension $N = 2$.

Correction. On pose

$$I = \int_K \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} dx,$$

et on effectue le changement de variable qui à tout élément x de K associe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans $S = \{\lambda \in \mathbb{R}^3 : \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$. On note (a_i^1, a_i^2) les coordonnées des sommets a_i de K . De $x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x)a_i$, on en déduit que

$$\begin{aligned} dx_1 &= a_1^1 d\lambda_1 + a_2^1 d\lambda_2 + a_3^1 d\lambda_3 \\ dx_2 &= a_1^2 d\lambda_1 + a_2^2 d\lambda_2 + a_3^2 d\lambda_3 \end{aligned}$$

Comme $\sum_i \lambda_i = 0$,

$$d\lambda_3 = -d\lambda_1 - d\lambda_2$$

et

$$\begin{aligned} dx_1 &= (a_1^1 - a_3^1)d\lambda_1 + (a_2^1 - a_3^1)d\lambda_2 \\ dx_2 &= (a_1^2 - a_3^2)d\lambda_1 + (a_2^2 - a_3^2)d\lambda_2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$dx_1 \wedge dx_2 = (a_1 - a_3) \wedge (a_2 - a_3)d\lambda_1 \wedge d\lambda_2.$$

Ainsi,

$$I = 2 \text{Vol}(K) \int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (6.1)$$

Il reste donc à calculer l'intégrale figurant dans le terme de droite.

$$\begin{aligned} & \int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \int_{\lambda_1=0}^1 \lambda_1^{\alpha_1} \left(\int_{\lambda_2+\lambda_3=1-\lambda_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_2 \right) d\lambda_1 \\ &= \int_{\lambda_1=0}^1 \lambda_1^{\alpha_1} (1-\lambda_1)^{\alpha_2+\alpha_3+1} d\lambda_1 \int_{\lambda_2+\lambda_3=1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_2 \\ &= \left(\int_0^1 t^{\alpha_1} (1-t)^{\alpha_2+\alpha_3+1} dt \right) \left(\int_0^1 t^{\alpha_2} (1-t)^{\alpha_3} dt \right). \end{aligned}$$

Par l'intégration par parties successives, on montre que

$$\int_{t=0}^1 t^n (1-t)^m dt = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

Ainsi,

$$\int_S \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\lambda_1 d\lambda_2 = \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2)!}.$$

qui combinée avec 6.1 nous donne **(6.44)**, p.166.

Exercice 6.3.6 Montrer que les formules **(6.45)** et **(6.46)** sont exactes pour $\psi \in P_1$.

Correction. Soit p un polynôme de degré 1, il existe q polynôme de degré 1 en λ tel que $q(\lambda(x)) = p(x)$. Or $\int_K 1 dx = \text{Vol}(K)$ et $\int_K \lambda_k dx = \text{Vol}(K)/(N+1) \sum_i \lambda_k(a_i)$. On en déduit donc que

$$\int_K q(\lambda(x)) = \text{Vol}(K)/(N+1) \sum_i q(\lambda(a_i)),$$

et que la formule **(6.46)** est exacte pour les polynôme de degré 1. De plus, comme p est linéaire, $p(a_0) = 1/(N+1) \sum_i p(a_i)$, ce qui établit l'exactitude de la formule **(6.45)**

Exercice 6.3.7 Soit K un triangle de \mathbb{R}^2 de sommets $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$ et de barycentre a_0 . Soit $(a_{ij})_{1 \leq i < j \leq 3}$ les points milieux des segments d'extrémités a_i, a_j . Montrer que la formule de quadrature

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{Aire}(K)}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \psi(a_{ij})$$

est exacte pour $\psi \in P_2$, tandis que la formule

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{Aire}(K)}{60} \left(3 \sum_{i=1}^3 \psi(a_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \psi(a_{ij}) + 27\psi(a_0) \right)$$

est exacte pour $\psi \in P_3$.

Correction. Comme précédemment, il suffit de vérifier l'exactitude des formules pour les polynômes $q(\lambda)$ de degré 2 ou 3. On pose

$$S_2(p) = \frac{\text{Vol}(K)}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(a_{ij})$$

et

$$S_3(p) = \frac{\text{Vol}(K)}{60} \left(3 \sum_{i=1}^3 p(a_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p(a_{ij}) + 27p(a_0) \right).$$

On pose

$$T_2(q) = S_2(q \circ \lambda) = \frac{\text{Vol}(K)}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} q((e_i + e_j)/2)$$

et

$$\begin{aligned} T_3(q) &= S_3(q \circ \lambda) \\ &= \frac{\text{Vol}(K)}{60} \left(3 \sum_{i=1}^3 q(e_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} q((e_i + e_j)/2) + 27q(1/3, 1/3, 1/3) \right). \end{aligned}$$

On note

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_K \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} dx = 6 \text{Vol}(K) \frac{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3)!}$$

On doit vérifier que pour tout α_i tel que $\sum_i \alpha_i \leq 2$,

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T_2(\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3})$$

et pour tout α_i tel que $\sum_i \alpha_i \leq 3$,

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T_3(\lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3}).$$

Par des considérations d'invariance, le nombre de vérifications se limite à 4 cas pour la première formule et 7 cas pour la seconde, et on a

$$\begin{aligned}
S(0, 0, 0) &= \text{Vol}(K) &= T_2(1) &= T_3(1), \\
S(1, 0, 0) &= \text{Vol}(K)/4 &= T_2(\lambda_1) &= T_3(\lambda_1), \\
S(1, 1, 0) &= \text{Vol}(K)/20 &= T_2(\lambda_1\lambda_2) &= T_3(\lambda_1\lambda_2), \\
S(2, 0, 0) &= \text{Vol}(K)/10 &= T_2(\lambda_1^2) &= T_3(\lambda_1^2), \\
S(1, 1, 1) &= \text{Vol}(K)/120 &= T_3(\lambda_1\lambda_2\lambda_3), \\
S(2, 1, 0) &= \text{Vol}(K)/60 &= T_3(\lambda_1^2\lambda_2), \\
S(3, 0, 0) &= \text{Vol}(K)/20 &= T_3(\lambda_1^3).
\end{aligned}$$

Exercice 6.3.8 Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq I}$ des points d'un N -simplexe K et $(\omega_i)_{1 \leq i \leq I}$ des poids réels. Soit une formule de quadrature

$$\int_K \psi(x) dx \approx \text{Volume}(K) \sum_{i=1}^I \omega_i \psi(b_i)$$

qui soit exacte pour $\psi \in P_k$. Montrer que, pour une fonction régulière ψ , on a

$$\frac{1}{\text{Volume}(K)} \int_K \psi(x) dx = \sum_{i=1}^I \omega_i \psi(b_i) + \mathcal{O}(h^{k+1}),$$

où h est le diamètre de K .

Correction. Soit ψ une fonction de classe \mathcal{C}^{k+1} . En effectuant un développement de Taylor, il existe une constante C telle que pour tout élément a du domaine (borné) considéré, il existe un polynôme T_a dépendant de ψ , de degré au plus k tel que

$$|\psi(a+u) - T_a(u)| \leq C|u|^{k+1}.$$

Considérons un simplexe K de centre de gravité a_0 , par intégration de la formule précédente sur les éléments u tels que $a_0+u \in K$ (en particulier, $|u| < h$), on obtient que

$$\left| \int_K \psi dx - \int_K T_{a_0}(u) dx \right| \leq Ch^{k+1}.$$

La formule de quadrature étant exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à k , on a donc

$$\left| \int_K \psi dx - \text{Vol}(K) \sum_i \omega_i T_{a_0}(b_i - a_0) \right| \leq C \text{Vol}(K) h^{k+1}.$$

En utilisant à nouveau le développement de Taylor de ψ en a_0 , on en déduit que

$$\left| \int_K \psi dx - \text{Vol}(K) \sum_i \omega_i \psi(b_i) \right| \leq C' \text{Vol}(K) h^{k+1}$$

où C' est une constante indépendante de h , ce qui achève la démonstration.

Exercice 6.3.9 On considère le carré $\Omega =]-1, +1[^2$ maillé suivant la Figure **6.11**. Calculer la matrice de rigidité \mathcal{K}_h des éléments finis P_1 appliqués au Laplacien avec condition aux limites de Neumann (on utilisera les symétries du maillage).

Correction. On procède comme pour l'exercice précédent. La numérotation de la matrice de rigidité \mathcal{K}_h diffère légèrement. On pose $v_{i+j(n+1)} = x_{i,j}$ pour tout $0 \leq i, j \leq n$, où $x_{i,j} = (hi, hj)$. Le point délicat consiste à considérer tous les cas possibles lors du calcul des produits scalaire des fonctions de base, ce qui est un peu laborieux. On obtient que \mathcal{K}_h est une matrice constituée de $(n+1) \times (n+1)$ blocs

$$\mathcal{K}_h = \begin{pmatrix} F & G & & & & & & & & 0 \\ G & D & E & & & & & & & \\ & E & D & E & & & & & & \\ & & E & \cdots & \cdots & & & & & \\ & & & \cdots & \cdots & E & & & & \\ & & & & E & D & E & & & \\ & & & & & E & D & G & & \\ 0 & & & & & & & G & F & \end{pmatrix}$$

où D , E , F et G sont les matrices $(n+1) \times (n+1)$ suivantes :

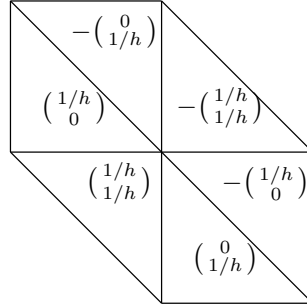
$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1/2 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & & & & & & & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & & & & & & \\ & 0 & \cdots & \cdots & & & & & \\ & & \cdots & \cdots & 0 & & & & \\ & & & 0 & 0 & -1/2 & & & \\ 0 & & & & -1/2 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1/2 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.3.10 Appliquer la méthode des éléments finis P_1 au problème de Dirichlet (**6.37**) dans le carré $\Omega =]0, 1[^2$ avec le maillage triangulaire uniforme de la Figure **6.12**. Montrer que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h est la même matrice que celle que l'on obtiendrait par application de la méthode des différences finies (à un facteur multiplicatif h^2 près), mais que le second membre b_h est différent.

Correction. On note n le nombre de mailles situées sur l'un des bords du domaine. Soit $h = 1/(n + 1)$, la taille d'une maille. On note $x_{i,j} = (x_i, x_j)$ les sommets du maillage où $x_i = ih$ (on a $0 < i, j < n$). On numérote les noeuds du maillage colonne par colonne puis ligne par ligne. En d'autres termes, on pose $v_{i+jn} = x_{i,j}$ pour tout $0 < i, j < n$. Enfin, on note ϕ_k la fonction de base P_1 associée au noeud v_k . La figure ci-dessous représente le gradient d'une fonction de base ϕ_k (constant sur chaque triangle).



On cherche à calculer $\mathcal{A}_{h,k,l} = \int_{\Omega} \nabla \phi_k \nabla \phi_l dx$. Si $k = l$,

$$\mathcal{A}_{h,k,k} = \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx.$$

$\nabla \phi_k$ est nul sur tout Ω à l'exclusion des 6 triangles contenant v_k . Sur chacun d'entre eux, $|\nabla \phi_k|^2$ est constant, égale à $1/h^2$ sur 4 d'entre eux, $2/h^2$ sur les deux autres. Enfin, l'aire des triangles du maillage étant égale à $h^2/2$. Ainsi,

$$\mathcal{A}_{h,k,k} = 4.$$

Si v_k et v_l sont des noeuds voisins, c' est à dire si $k = l + 1$, $k = l - 1$, $k = l + n - 1$, $k = l + n$, $k = l + n - 1$, $k = l - n$ ou $k = l - n + 1$, les supports de ϕ_k et ϕ_l ne sont pas disjoints, cependant, le terme $\mathcal{A}_{h,k,l}$ est nul dans les cas $k = l - n + 1$ et $k = l + n - 1$ (les gradients des fonctions ϕ_k et ϕ_l sont orthogonaux). Dans les autres cas, on a

$$\mathcal{A}_{h,k,l} = -1.$$

En d'autres termes, on a

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} D & E & & & 0 \\ E & D & E & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & E & D & E \\ 0 & & & & E & D \end{pmatrix}$$

où E et D sont les matrices $(n - 1) \times (n - 1)$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc en effet la matrice issue de l'analyse par différences finis multipliée par h^2 . Cependant, le second membre du système linéaire obtenu diffère, en effet, on a

$$(b_h)_k = \int_{\Omega} f \phi_k dx \neq h^2 f(v_k).$$

Exercice 6.3.11 On reprend les notations de l'Exercice 6.3.10. On note n le nombre de points du maillage sur un coté du carré (supposé être le même pour chaque coté). On numérote "ligne par ligne" les noeuds du maillage (ou les degrés de liberté). Montrer que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h des éléments finis P_1 est de taille de l'ordre de n^2 et de largeur de bande de l'ordre de $2n$ (pour n grand).

Montrer que la même méthode et le même type de maillage pour le cube $\Omega =]0, 1[^3$ conduisent à une matrice de taille de l'ordre de n^3 et de largeur de bande de l'ordre de $2n^2$ (où n est le nombre de noeuds le long d'une arête du cube Ω).

Correction. La taille de la matrice \mathcal{K}_h est exactement n^2 , tandis que sa largeur de bande est n , en effet, dès que $|k - l| > n$, $\mathcal{A}_{hk,l} = 0$. Dans le cas du cube, on note $v_{i+jn+kn^2} = (x_i, x_j, x_k)$ les noeuds du maillage, où $x_i = i/(n+1)$. Le nombre de degré de liberté est donc égale à n^3 . Enfin, si $|k - l| > n^2 + n$, le support des fonctions test ϕ_k et ϕ_l sont disjoints. Ainsi, la matrice du système obtenu à une largeur de bande de l'ordre de n^2 pour n grand.

Exercice 6.3.12 On dit qu'une matrice carrée réelle $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une M-matrice si, pour tout i ,

$$b_{ii} > 0, \quad \sum_{k=1}^n b_{ik} > 0, \quad b_{ij} \leq 0 \quad \forall j \neq i.$$

Montrer que toute M-matrice est inversible et que tous les coefficients de son inverse sont positifs ou nuls.

Correction. Soit B une M-matrice et $X \in \mathbb{R}^N$ tel que $BX = Y \geq 0$. Introduisons l'indice i_0 tel que

$$X_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq N} X_i.$$

On a alors

$$B_{i_0 i_0} X_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} B_{i_0 j} X_j = Y_{i_0} \geq 0,$$

d'où

$$\left(\sum_{j=1}^N B_{i_0 j} \right) X_{i_0} \geq \sum_{j \neq i_0} B_{i_0 j} (X_{i_0} - X_j).$$

Mais le second membre de cette inégalité est négatif ou nul d'après la définition de i_0 . Comme $\sum_{j=1}^N B_{i_0 j} > 0$, on en déduit que $X_{i_0} > 0$ et donc que $X > 0$. Enfin, B est inversible car injective. En effet, si $BX = 0$, $BX \geq 0$ et $B(-X) \geq 0$, d'où $X \geq 0$ et $-X \geq 0$, c'est à dire $X = 0$.

Exercice 6.3.13 On se place en dimension $N = 2$. Soit u_h la solution approchée du problème de Dirichlet (6.37) obtenue par la méthode des éléments finis P_1 . On suppose que tous les angles des triangles $K_i \in \mathcal{T}_h$ sont inférieurs ou égaux à $\pi/2$. Montrer que $u_h(x) \geq 0$ dans Ω si $f(x) \geq 0$ dans Ω . Indication : on montrera que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_h + \epsilon \text{Id}$ est une M-matrice, où \mathcal{K}_h est la matrice de rigidité.

Correction. Soit \mathcal{K}_h la matrice du système issu de la méthode des éléments finis, avec conditions de Dirichlet. Il suffit de prouver que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_h + \epsilon I$ est une M-matrice. En effet, dans ce cas et d'après l'exercice précédent,

$$(\mathcal{K}_h + \epsilon I)^{-1} \geq 0,$$

De plus, comme \mathcal{K}_h est inversible, $(\mathcal{K}_h + \epsilon I)^{-1}$ converge vers \mathcal{K}_h^{-1} et

$$\mathcal{K}_h^{-1} \geq 0.$$

Tout d'abord, il est clair que

$$(\mathcal{K}_h)_{ii} > 0 \tag{6.2}$$

pour tout i . Considérons ensuite deux sommets distincts S_i et S_j communs à un triangle T_k du maillage. Le gradient de ϕ_i est orthogonal au coté du triangle T_k opposé à S_i . Il en est de même pour $\nabla \phi_j$. Il découle alors de l'hypothèse effectuée sur le maillage que

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \leq 0$$

sur T_k . Le raisonnement étant valable sur tous les triangles du maillage, on en déduit que

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \leq 0 \text{ pour tout } i \neq j. \tag{6.3}$$

Soit n_0 le nombre de noeuds du maillage situés à l'intérieur du domaine Ω et n le nombre de noeuds total, on numérote les noeuds S_i du maillage de sorte que $S_i \in \partial\Omega$ pour $i > n_0$. Comme

$$1 = \sum_{j=1}^n \phi_j,$$

pour tout i , $0 < i \leq n_0$,

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla 1 dx = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx.$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{n_0} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx = - \sum_{j=n_0+1}^n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx.$$

Or on a prouvé précédemment que le second membre étant positif. On a donc montré que

$$\sum_{i=1}^{n_0} (\mathcal{K}_h)_{ij} dx \geq 0. \tag{6.4}$$

De 6.2, 6.3, 6.4, on déduit que $\mathcal{K}_h + \epsilon I$ est une M-matrice pour tout $\epsilon > 0$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 6.3.14 Appliquer la méthode des éléments finis P_k au système de l'élasticité (5.53). Montrer en particulier que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h est dans ce cas d'ordre Nn_{dl} où N est la dimension d'espace et n_{dl} est le nombre de noeuds de degrés de liberté.

Correction. La formulation faible de l'élasticité linéarisée consiste à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)^N$ tel que

$$\int_{\Omega} 2\mu e(u)e(v) + \lambda(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)dx = \int_{\Omega} f.vdx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Soit \mathcal{T}_h un maillage régulier de Ω , on introduit les espaces discrets

$$V_h = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R})^N : u|_K \in P_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}$$

et

$$V_{0h} = \{u \in V_h : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

L'approximation variationnelle du problème (5.53), p.127 par la méthode des éléments finis P_k consiste à déterminer $u \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega} 2\mu e(u)e(v) + \lambda(\operatorname{div}u)(\operatorname{div}v)dx = \int_{\Omega} f.vdx \text{ pour tout } v \in V_{0h},$$

c'est à dire à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

où

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} 2\mu e(\phi_i)e(\phi_j) + \lambda(\operatorname{div}\phi_i)(\operatorname{div}\phi_j)dx$$

et

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f\phi_i dx.$$

L'existence d'une solution à ce problème est évidente par application du théorème de Lax-Milgram. Enfin, la dimension de l'espace V_{0h} est égale à Nn_{dl} où n_{dl} est le nombre de noeuds de degrés de liberté.

Exercice 6.3.15 Expliciter la matrice de rigidité \mathcal{K}_h obtenue par application de la méthode des éléments finis P_k au problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.5)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, et $a \in L^\infty(\Omega)$ tel que $a(x) \geq a_0 > 0$ p.p. dans Ω .

Correction. L'espace d'approximation issu de la méthode des éléments finis P_k , associé au problème de Neumann (6.48) est basée sur l'espace discret

$$V_h = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R}) : u|_K \in P_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Soit $(\phi_i)_{i=1,nd}$ les fonctions de base associées au degré de liberté du treillis d'ordre k du maillage \mathcal{T}_h . L'approximation variationnelle consiste à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + a \phi_i \cdot \phi_j dx$$

et

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f \cdot \phi_i dx.$$

Exercice 6.3.16 Montrer que la matrice de rigidité \mathcal{K}_h obtenue par application de la méthode des éléments finis P_k au problème de convection-diffusion de l'Exercice 5.2.2 est inversible mais pas symétrique.

Correction. L'espace d'approximation variationnelle du problème de convection diffusion de l'Exercice 5.2.2 est

$$V_{0h} = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R})^N : u_i|_K \in P_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Soit $(\phi_i)_{i=1,nd}$ les fonctions de base associées au degré de liberté du treillis d'ordre k du maillage \mathcal{T}_h . L'approximation variationnelle consiste à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + (V \cdot \nabla \phi_i) \phi_j dx$$

et

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f \cdot \phi_i dx.$$

On rappelle que la divergence de V est supposée nulle. Ainsi, pour tout u_h et v_h appartenant à V_{0h} ,

$$\int_{\Omega} (V \cdot \nabla u_h) v_h dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} V) v_h u_h + (V \cdot \nabla v_h) u_h dx = - \int_{\Omega} (V \cdot \nabla v_h) u_h dx.$$

En particulier, la matrice \mathcal{K}_h est en général non symétrique, sauf si tous les termes $\int_{\Omega} (V \cdot \nabla \phi_i) \phi_j dx$ sont nuls. Enfin, la matrice \mathcal{K}_h est inversible car injective, en effet,

$$\langle \mathcal{K}_h U_h, U_h \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla u_h + (V \cdot \nabla u_h) u_h dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla u_h dx.$$

Exercice 6.3.17 On se propose de résoudre numériquement l'équation des plaques (5.67) par une méthode d'éléments finis (de type Hermite) en dimension $N = 2$. Pour un maillage triangulaire \mathcal{T}_h on introduit l'espace discret

$$V_h = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in P_5 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Montrer que tout polynôme $p \in P_5$ est caractérisé de manière unique sur un triangle K par les 21 valeurs réelles suivantes

$$v(a_j), \nabla v(a_j), \nabla \nabla v(a_j), \frac{\partial p(b_j)}{\partial n} \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.6)$$

où (a_1, a_2, a_3) sont les sommets de K , (b_1, b_2, b_3) les milieux des cotés de K , et $\partial p(b_j)/\partial n$ désigne la dérivée normale au coté de b_j . Montrer que V_h est un sous-espace de $H^2(\Omega)$ dont les éléments v sont caractérisés de manière unique par les valeurs (6.49) pour chaque sommet et milieu d'arête du maillage. En déduire une méthode d'éléments finis (dite d'Argyris) pour résoudre (5.67).

Correction.

1. Unisolvance (équivalent du Lemme 6.3.3, p.163)

On considère l'application qui à un élément de P_5 associe les 21 valeurs (6.49). Comme P_5 est un espace de dimension 21, il suffit de prouver que cette application est injective afin de prouver qu'elle est bijective. Enfin, quitte à effectuer un changement de variable par une application affine, on peut se contenter de considérer le cas d'un triangle équilatéral tel que $a_1 = (-1, 0)$, $a_2 = (1, 0)$. Soit $p \in P_5$ annulant toutes les valeurs (6.49). On pose $q_1(x_1) = p(x_1, 0)$ et $q_2(x_1) = \partial p/\partial x_2(x_1, 0)$. On vérifie que

$$q_1(\pm 1) = q_1'(\pm 1) = q_1''(\pm 1) = 0.$$

Comme q_1 est un polynôme de degré au plus 5, on en déduit que $q_1 = 0$. Ainsi, p est divisible par x_2 : il existe un polynôme $q(x_1, x_2)$ tel que

$$p(x_1, x_2) = x_2 q(x_1, x_2).$$

De même, on vérifie que

$$q_2(\pm 1) = q_2'(\pm 1) = q_2(0) = 0.$$

Comme q_2 est un polynôme de degré au plus 4, on a donc $q_2 = 0$. Comme $q_2(x_1) = q(x_1, 0)$, q est divisible par x_2 . On a donc prouver que p est divisible par x_2^2 . Pour des raisons d'invariance, on en déduit que p est également divisible par $(1 + x_1 - x_2/\sqrt{3})^2$ et $(1 - x_1 - x_2/\sqrt{3})^2$. Ainsi, p est un polynôme de degré au plus 5 divisible par un polynôme de degré 6 et $p = 0$.

2. Raccordement au niveau des mailles

Afin de résoudre le problème, il nous faut prouver un équivalent du Lemme 6.3.4, p.163 :

Soit K et K' deux triangles ayant un coté commun (a_1, a_2) . Soit p_K et $p_{K'}$ deux éléments de P_5 , alors la fonction v définie sur $K \cup K'$ par

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K'. \end{cases}$$

est de classe C^1 si et seulement si

$$\begin{aligned} p_K(a_i) &= p_{K'}(a_i), & \nabla p_K(a_i) &= \nabla p_{K'}(a_i), \\ \nabla \nabla p_K(a_i) &= \nabla \nabla p_{K'}(a_i), & \partial p_K/\partial n(0) &= -\partial p_{K'}/\partial n(0). \end{aligned} \quad (6.7)$$

où n désigne la normale extérieur à K .

On peut considéré sans perte de généralité que K et K' sont équilatéraux, situés de part et d'autre de (a_1, a_2) . A chacun des polynôme, on associe comme précédemment les polynômes

$$\begin{aligned} q_1^K(x_1) &= P_K(x_1, 0) & q_2^K(x_1) &= \partial P_K / \partial x_2(x_1, 0) \\ q_1^{K'}(x_1) &= P_{K'}(x_1, 0) & q_2^{K'}(x_1) &= \partial P_{K'} / \partial x_2(x_1, 0). \end{aligned}$$

La fonction v est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si $q_1^K = q_1^{K'}$ et $q_2^K(x_1) = q_2^{K'}(x_1)$. Or q_1^K est entièrement et uniquement déterminer par

$$\begin{aligned} p_K(a_1), & & p_K(a_2) & & \partial p_K / \partial x_1(a_1), \\ \partial p_K / \partial x_1(a_2), & \partial^2 p_K / \partial x_1^2(a_1), & \partial^2 p_K / \partial x_1^2(a_2) \end{aligned}$$

De même, q_2^K est entièrement et uniquement déterminer par

$$\begin{aligned} \partial p_K / \partial x_2(a_1), & \partial p_K / \partial x_2(a_2), & \partial^2 p_K / \partial x_1 \partial x_2(a_1), \\ \partial^2 p_K / \partial x_1 \partial x_2(a_2), & \partial p_K \partial n(0) \end{aligned}$$

Comme il en est de même pour K' , on en déduit que v est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si les relations 6.7 sont vérifiée.

3. Méthode d'Argyris

Tout d'abord, l'espace

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^1(\Omega) : v|_{K_i} \in P^5 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}$$

est inclus dans $H^2(\Omega)$ (la dérivée d'un élément de V_h appartient à $H^1(\Omega)$ d'après le Lemme 4.3.19, p.86). Enfin, d'après le point précédent, un élément v de V_h est entièrement déterminer par les valeurs de v , ∇v et $\nabla \nabla v$ aux noeuds du maillage ainsi que par les flux $\partial v / \partial n(b_k)$, b_k parcourant les milieux des arêtes k du maillage (on oriente de manière arbitraire chacune des arêtes). On peut donc construire une base de V_h formés des éléments $(\varphi_{i,\alpha,\beta})_{(i,\alpha,\beta)}$ et (ψ_k) où $i \in \{1, \dots, n_s\}$, $(\alpha, \beta) \in S = \{(0, 0); (1, 0); (0, 1); (2, 0); (0, 2); (1, 1)\}$ et $k \in \{1, \dots, n_c\}$ définis par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\gamma+\mu} \varphi_{i,\alpha,\beta}}{\partial x_1^\gamma \partial x_2^\mu}(a_j) &= \delta_j^i \delta_\gamma^\alpha \delta_\mu^\beta; & \frac{\partial \varphi_{i,\alpha,\beta}}{\partial n}(b_l) &= 0; \\ \frac{\partial^{\gamma+\mu} \psi_k}{\partial x_1^\gamma \partial x_2^\mu}(a_j) &= 0; & \frac{\partial \psi_k}{\partial n}(b_l) &= \delta_l^k. \end{aligned}$$

pour tout $j \in \{1, \dots, n_s\}$, $l \in \{1, \dots, n_c\}$ et $(\alpha, \beta) \in S$. Afin de résoudre l'équation des plaques (5.67), p.134, on introduit le sous espace de V_h

$$V_{0h} = V_h \cap H_0^2(\Omega).$$

L'espace V_{0h} est l'ensemble des fonctions de V_h , qui prolongée par zéro en dehors de Ω , appartiennent à H^2 . On en déduit V_{0h} est engendré par les éléments $(\varphi_{i,\alpha,\beta})_{(i,\alpha,\beta)}$ et (ψ_k) où $i \in \{1, \dots, n_{s0}\}$ et $k \in \{1, \dots, n_{c0}\}$ parcourent les sommets et arêtes

n'appartenant pas au bord de Ω . L'approximation variationnelle consiste à trouver $u_h \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega} \Delta u_h \Delta v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \text{ pour tout } v_h \in V_{0h}.$$

D'après le Théorème de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique. Enfin, il équivaut à résoudre le système

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h, \quad (6.8)$$

où la matrice de masse est définie par

$$K_h = \begin{pmatrix} D_h & F_h \\ F_h^T & H_h \end{pmatrix},$$

D_h et F_h sont des matrice définies par les blocs

$$\begin{aligned} D_h &= ((E_h)_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, 6\}^2} \\ F_h &= ((G_h)_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ((E_h)_{ij})_{kl} &= \int_{\Omega} \Delta \varphi_{k,s_i} \Delta \varphi_{l,s_i} dx, \quad \text{où } (k, l) \in \{1, \dots, n_{s0}\}^2 \\ ((G_h)_i)_{kl} &= \int_{\Omega} \Delta \varphi_{k,s_i} \Delta \psi_l dx \quad \text{où } (k, l) \in \{1, \dots, n_{s0}\} \times \{1, \dots, n_{c0}\} \\ (H_h)_{k,l} &= \int_{\Omega} \Delta \psi_k \Delta \psi_l dx \quad \text{où } (k, l) \in \{1, \dots, n_{c0}\}^2 \end{aligned}$$

avec $s = ((0, 0); (1, 0); (0, 1); (2, 0); (0, 2); (1, 1))$. Le vecteur b_h est défini par

$$b_h = ((c_h)_i)_{i=1, \dots, 6}, d_h)$$

où

$$\begin{aligned} ((c_h)_i)_k &= \int_{\Omega} f_h \varphi_{k,s_i} \quad k \in \{1, \dots, n_{s0}\} \\ (d_h)_k &= \int_{\Omega} f_h \psi_k \quad k \in \{1, \dots, n_{c0}\}. \end{aligned}$$

Enfin, la solution u_h de l'approximation variationnelle est telle que

$$u_h = \sum_{i=0}^5 \sum_{k=1}^{n_{s0}} (U_h)_{in_{s0}+k} \varphi_{k,s_{i+1}} + \sum_{k=1}^{n_{c0}} (U_h)_{6n_{s0}+k} \psi_k,$$

où U_h est solution du système 6.8

Exercice 6.3.18 Montrer que pour une suite de maillages réguliers, et pour des éléments finis P_1 , l'opérateur d'interpolation r_h vérifie en dimension $N = 2$ ou 3

$$\|v - r_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Correction. Par construction de $r_h u$, la restriction de $r_h u$ à un N-simplexe K_i est simplement $r_{K_i} u$. Par conséquent,

$$\|v - r_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \|v - r_{K_i} v\|_{L^2(K_i)}^2.$$

On applique la majoration (voir démonstration du Lemme **6.3.20**)

$$\|v - r_K v\|_{L^2(K)}^2 \leq C \|B\|^{k+1} |v|_{H^{k+1}(K)}$$

à chacun des N-simplexe K_i . Ainsi,

$$\|v - r_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \|B_i\|^{2k+2} |v|_{H^{k+1}(K)}^2.$$

Il suffit de combinée cette estimation avec l'inégalité

$$\|B_i\| \leq \text{diam}(K_i) / \rho(K_0) \leq Ch$$

pour conclure.

Exercice 6.3.19 Soit $K = [0, 1]^2$ le cube unité en dimension $N = 2$ de sommets $a^1 = (0, 0)$, $a^2 = (1, 0)$, $a^3 = (1, 1)$, $a^4 = (0, 1)$. On définit $x_3 = 1 - x_1$, $x_4 = 1 - x_2$, et \bar{i} comme la valeur de i modulo 4. Grâce à ses notations, chaque sommet a^i est défini par $x_{\bar{i}} = x_{\bar{i}+1} = 0$. Vérifier que les fonctions de base de Q_1 sont

$$p_i(x) = x_{\bar{i}+2} x_{\bar{i}+3} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 4,$$

et que celles de Q_2 sont

$$\begin{aligned} P_i(x) &= x_{\bar{i}+2}(2x_{\bar{i}+2} - 1)x_{\bar{i}+3}(2x_{\bar{i}+3} - 1) & \text{pour } 1 \leq i \leq 4 \\ P_i(x) &= -4x_{\bar{i}+2}(x_{\bar{i}+2} - 1)x_{\bar{i}+3}(2x_{\bar{i}+3} - 1) & \text{pour } 5 \leq i \leq 8 \\ P_9(x) &= 16x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Correction. 1. Fonctions de bases Q_1 .

Pour des raisons de périodicité des formules, il suffit de vérifier la forme de la fonction de base p_1 . Or

$$p_1(x) = x_3 x_4 = (1 - x_1)(1 - x_2),$$

qui vaut en effet 1 pour $x = a_1$ et zéro sur les autres sommets du carré.

2. Fonctions de bases Q_2 .

En ce qui concerne la base des éléments Q_2 , on a

$$P_1(x) = x_3(2x_3 - 1)x_4(2x_4 - 1) = (1 - x_1)(1 - 2x_1)(1 - x_2)(1 - 2x_2)$$

qui vaut 1 pour $x = a_1$ et zéro sur les autres noeud du treillis.

$$P_5(x) = -4x_3(x_3 - 1)x_4(2x_4 - 1) = 4(1 - x_1)x_1(1 - x_2)(1 - 2x_2)$$

qui vaut 1 pour $x = (a_1 + a_2)/2$ et zéro sur les autres noeuds du treillis. Enfin,

$$P_9(x) = 16x_1 x_2 x_3 x_4,$$

qui vaut 1 en $x = (a_1 + a_2 + a_3 = a_4)/4$ et zéro sur les autres noeuds du treillis.

Exercice 6.3.20 Montrer que pour la méthode des éléments finis P_1 /bulle pour la vitesse et P_1 pour la pression on a $\dim(\text{Ker}B_h^*) = 1$.

Correction. Soit $r_h \in \mathcal{Q}_h$ et $w_h \in \mathcal{V}_{0h}$, espace issu de la méthode P_1 /bulle. Par définition,

$$W_h \cdot B_h^* R_h = B_h W_h \cdot R_h = \int_{\Omega} \text{div}(w_h) r_h dx = \int_{\Omega} w_h \cdot \nabla r_h dx.$$

Si R_h appartient au noyau de B_h^* , on a

$$\int_{\Omega} w_h \cdot \nabla r_h dx = 0$$

pour tout élément $w_h \in V_{0h}$. En particulier, si on applique l'égalité précédente à la fonction bulle $\lambda_1(x) \cdots \lambda_{N+1}(x) e_k$ de la maille K_i (λ_i sont les coordonnées barycentriques de x dans la maille K_i et $k \in \{1, \dots, N\}$), on obtient

$$\nabla r_h(K_i) \cdot e_k \left(\int_{K_i} \lambda_1(x) \cdots \lambda_{N+1}(x) dx \right) = 0.$$

Or

$$\left(\int_{K_i} \lambda_1^i(x) \cdots \lambda_{N+1}^i(x) dx \right) > 0,$$

d'où on en déduit que $\nabla r_h(K_i) = 0$. Ainsi, r_h est une fonction constante et

$$\dim(B_h^*) = 1.$$

Exercice 6.3.21 On considère les équations de Stokes (**6.66**) en dimension $N = 1$ (ce modèle n'a aucun intérêt puisque sa solution explicite est $u = 0$ et p une primitive de f , mais il permet de bien comprendre les problèmes de discrétisation). Pour $\Omega = (0, 1)$, on considère le maillage de points $x_j = jh$ avec $h = 1/(n+1)$ et $0 \leq j \leq n+1$. On définit la méthode de différences finies centrées (d'ordre 2) suivante

$$\begin{cases} \mu \frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{h^2} + \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2h} = f(x_j) \text{ pour } 1 \leq j \leq n \\ \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Montrer que ce système d'équations algébriques est mal posé, et en particulier que la pression (p_j) est définie à l'addition d'une constante près ou d'un multiple d'une pression définie par ses composantes $(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$.

Correction. On vérifie sans mal que la pression est définie à l'addition d'une constante près ou d'un multiple de $(1, 0, \dots, 1, 0)$. Lorsque n est impair, la situation est particulièrement critique, car u_j n'est, dans ce cas, pas non plus déterminé de manière unique. Dans tous les cas, le système est mal posé.