

Chapitre 7

PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES

7.1 Motivation et exemples

Exercice 7.1.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}^N$. Montrer que $u(x) = \exp(ik \cdot x)$ est une solution de (7.5) si $|k|^2 = \lambda$. Une telle solution est appelée onde plane.

Correction. Soit $u(x) = \exp(ik \cdot x)$, on a $\nabla u(x) = i \exp(ik \cdot x)k$ et

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = -|k|^2 \exp(ik \cdot x).$$

Ainsi, u est solution de l'équation (7.5) dès que $|k|^2 = \omega^2$.

Exercice 7.1.2 Soit un potentiel régulier $V(x)$. Montrer que, si $\mathbf{u}(x, t) = e^{-i\omega t}u(x)$ est solution de

$$i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Delta \mathbf{u} - V \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+, \quad (7.1)$$

alors $u(x)$ est solution de

$$-\Delta u + Vu = \omega u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (7.2)$$

Correction. Il suffit d'effectuer le calcul. En effet,

$$i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) = e^{-i\omega t} \omega u(x) \quad \Delta \mathbf{u}(x, t) = e^{-i\omega t} \Delta u(x).$$

Comme \mathbf{u} est solution de l'équation de Schrödinger (7.7), on en déduit que

$$-\Delta u + Vu = \omega u.$$

Exercice 7.1.3 Soit $V(x) = Ax \cdot x$ avec A matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que $u(x) = \exp(-A^{1/2}x \cdot x/2)$ est une solution de (7.8) si $\omega = \text{tr}(A^{1/2})$. Une telle solution est appelée état fondamental.

Correction.

Soit $u(x) = \exp(-A^{1/2}x.x/2)$. On a

$$\nabla u = -\exp(-A^{1/2}x.x/2)A^{1/2}x$$

et

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div}(\nabla u) \\ &= \exp(-A^{1/2}x.x/2)((A^{1/2}x.e_1)^2 + (A^{1/2}x.e_2)^2 + (A^{1/2}x.e_3)^2) \\ &\quad - \exp(-A^{1/2}x.x/2) \operatorname{tr}(A^{1/2}) \\ &= (Ax.x - \operatorname{tr}(A^{1/2}))u. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-\Delta u + Vu = \operatorname{tr}(A^{1/2})u.$$

7.2 Théorie spectrale

Exercice 7.2.1 Montrer que l'application identité Id dans un espace de Hilbert V de dimension infinie n'est jamais compacte (utiliser le Lemme 7.2.6).

Correction.

La boule unité d'un espace de Hilbert n'étant pas compacte, l'application identité n'est pas compacte.

Exercice 7.2.2 Soit l'espace de Hilbert ℓ_2 des suites réelles $x = (x_i)_{i \geq 1}$ telles que $\sum_{i \geq 1} |x_i|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i \geq 1} x_i y_i$. Soit $(a_i)_{i \geq 1}$ une suite de réels bornés, $|a_i| \leq C < +\infty$ pour tout $i \geq 1$. On définit l'application linéaire A par $Ax = (a_i x_i)_{i \geq 1}$. Vérifier que A est continue. Montrer que A est compacte si et seulement si $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = 0$.

Correction.

Soit x un élément de ℓ^2 ,

$$\|Ax\|_{\ell^2}^2 = \sum_i |a_i x_i|^2 \leq \sup_i |a_i|^2 \sum_i |x_i|^2 = \sup_i |a_i|^2 \|x\|_{\ell^2}^2.$$

Ainsi, A est une application continue le ℓ^2 dans ℓ^2 .

Supposons que $\lim a_i = 0$. Soit x_n une suite d'éléments de la boule unité de ℓ^2 . On pose $y^n = Ax^n$. Afin de prouver que l'opérateur A est compact, on va construire une sous-suite de y^n convergents. On commence par construire une suite de sous-suite par récurrence : On pose $y^{n,0} = y^n$. Pour tout k , $y^{n,k+1}$ est une suite extraite de $y^{n,k}$ telle que $y_k^{n,k}$ soit convergente (c'est toujours possible puisque pour tout k , $y_k^{n,k}$ est borné). Enfin, on procède à l'extraction d'une sous-suite diagonale en définissant la suite $z^n = y^{n,n}$. Reste à prouver que la suite z^n est de Cauchy dans ℓ^2 . Soit $\varepsilon > 0$,

comme a_i converge vers 0, il existe l tel que pour tout $i > l$, $|a_i| < \varepsilon$. On en déduit que

$$\sum_i > l |z_i^n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Notons que pour tout k , la suite z_k^n est simplement convergente. Ainsi, pour n et p assez grand, on a

$$\sum_{i \leq l} |z_i^n - z_i^p|^2 \leq \varepsilon^2.$$

En combinant ces deux résultats, on en déduit que pour n et p assez grand,

$$\sum_i |z_i^n - z_i^p|^2 \leq 3\varepsilon^2,$$

et que $\|z^n - z^p\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ lorsque n et p convergent vers l'infini. Ainsi, A est compact.

Supposons que la suite a_i ne converge pas vers zéro. Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout N , il existe $i > N$ tel que $|a_i| > M$. On peut donc définir les suites x^k de ℓ^2 et i_k de \mathbb{N} telles que

$$x_n^k = \delta_{i_k}^n$$

,

$$|a_{i_k}| > M$$

et i_k strictement croissante. On pose $y^k = Ax^k$. La suite x^k est bornée dans ℓ^2 , tandis que la suite y^k d'éléments de ℓ^2 n'est pas convergente. En effet, pour tout k et l on a

$$\|u^k - u^l\|_{\ell^2} > \sqrt{2}M.$$

Ainsi, A n'est pas compacte.

Exercice 7.2.3 Soit U , V et W trois espaces de Hilbert de dimension infinie, A une application linéaire continue de V dans W , et B une application linéaire continue de U dans V . Montrer que l'application AB est compacte dès que A ou B est compacte. En déduire qu'une application linéaire continue compacte n'est jamais inversible d'inverse continu en dimension infinie.

Correction.

Soit x_n une suite d'éléments de la boule unité de U .

Supposons A compacte, B continue. Posons $y_n = Bx_n$. L'application B étant continue, $\|y_n\| \leq \|B\|$. La suite y_n étant bornée, on déduit de la compacité de l'application A qu'il existe une sous-suite $y_{n'}$ de y_n telle que $By_{n'} = ABx_{n'}$ converge dans W . En d'autres termes, AB est une application compacte.

Considérons le cas B compacte et A continue. De la compacité de B , on déduit qu'il existe une sous-suite $x_{n'}$ de x_n telle que $Bx_{n'}$ soit convergente. L'application A étant continue, $ABx_{n'}$ est convergente et AB est compacte.

Si A est compacte, l'application inverse A^{-1} (qui est linéaire) ne peut être continue. En effet, dans ce cas l'application identité AA^{-1} serait compacte, ce qui n'est jamais le cas en dimension infini.

Exercice 7.2.4 On reprend les notations et les hypothèses du Théorème 7.2.8. Montrer que, pour $v \in V$, l'équation $Au = v$ admet une unique solution $u \in V$ si et seulement si v vérifie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle v, u_k \rangle|^2}{\lambda_k^2} < +\infty.$$

Correction. Supposons qu'il existe u tel que $Au = v$. Pour tout k , $\langle Au, u_k \rangle = \langle v, u_k \rangle$ et donc

$$\langle u, u_k \rangle = \langle u, Au_k \rangle / \lambda_k = \langle v, u_k \rangle / \lambda_k.$$

La norme de u étant finie,

$$\sum_k \frac{\langle v, u_k \rangle^2}{\lambda_k^2} < +\infty.$$

Réciproquement, si v vérifie la relation précédente,

$$u = \sum_k \frac{\langle v, u_k \rangle}{\lambda_k} u_k$$

appartient à U (la série est convergente). On vérifie de plus que $Au = v$.

Exercice 7.2.5 Soit $V = L^2(0, 1)$ et A l'application linéaire de V dans V définie par $(Af)(x) = (x^2 + 1)f(x)$. Vérifier que A est continue, coercive, auto-adjointe mais pas compacte. Montrer que A n'a pas de valeurs propres. On pourra vérifier aussi que $(A - \lambda \text{Id})$ est inversible d'inverse continu si et seulement si $\lambda \notin [1, 2]$.

Correction.

7.3 Valeurs propres d'un problème elliptique

Exercice 7.3.1 Démontrer le Corollaire 7.3.3.

Correction. Soit λ une valeur propre de (7.11) de vecteur propre u , on a alors

$$a(u, v) + \eta \langle u, v \rangle_H = (\lambda + \eta) \langle u, v \rangle_H \text{ pour tout } v \in V.$$

Et $\lambda + \eta$ est une valeur propre pour la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) + \eta \langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Réciproquement, si μ est une valeur propre pour la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) + \eta \langle \cdot, \cdot \rangle_H$, on obtient que $\mu - \eta$ est valeur propre de (7.11). La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot) + \eta \langle \cdot, \cdot \rangle_H$ étant symétrique, continue et coercive sur V , il suffit donc d'appliquer le Théorème 7.3.2 pour en déduire le Corollaire 7.3.3.

Exercice 7.3.2 En dimension $N = 1$, on considère $\Omega =]0, 1[$. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.16). A l'aide de la décomposition spectrale de ce problème (voir la Remarque 7.2.9), montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

converge dans $L^2(0, 1)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$, et dans $H^1(0, 1)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k^2 < +\infty$.

Correction. Tout d'abord, si u est une fonction propre du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet, u est une fonction de classe C^∞ . Ainsi,

$$u'' + \lambda u = 0$$

est une équation différentielle classique dont les solutions sont de la forme

$$u = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

De la condition aux limites $u(0) = 0$, on en déduit que $B = 0$. Enfin, la condition aux limites $u(1) = 1$ implique $\sqrt{\lambda} = k\pi$. Les vecteurs propres du Laplacien unidimensionnel avec conditions aux limites de Dirichlet sont donc les fonctions

$$u_k = \sin(k\pi x)$$

de valeurs propres $\lambda_k = k^2\pi^2$. Comme l'injection de $H_0^1(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ est compacte et que $a(u, v) = \int_0^1 \nabla u \cdot \nabla v dx$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H_0^1(]0, 1[)$, on peut appliquer le Théorème 7.3.2. Ainsi, $u_k/k\pi$ forment une base de $H^1(]0, 1[)$ et u_k de $L^2(]0, 1[)$. On en déduit que la série

$$\sum_k a_k \sin(kx)$$

converge dans L^2 si et seulement si $\sum_k a_k^2 < \infty$ et dans H_0^1 si et seulement si $\sum_k k^2 a_k^2 < \infty$.

Exercice 7.3.3 On considère un parallélépipède

$$\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[\times \cdots \times]0, L_N[,$$

où les $(L_i > 0)_{1 \leq i \leq N}$ sont des constantes positives. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.16).

Correction.

Soit $u_k(x) = \sin(k\pi x)$ les fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur $]0, 1[$. Pour tout entier $0 < p < N + 1$, et tout $k \in \mathbb{N}_*$, on pose

$$u_{p,k}(x) = u_k(x/L_p).$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}_*^p$, on pose

$$v_k = \prod_{p=1}^N u_{p,k_p}.$$

On vérifie que pour k , v_k est une valeur propre du Laplacien sur Ω avec conditions aux bords de Dirichlet de valeurs propres

$$\lambda_k = \left(\prod_{p=1}^N k_p \pi / L_p \right)^2.$$

Pour conclure, il reste à prouver que la famille $v_k / \sqrt{\lambda_k}$ forme une base de $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour tout $w \in L^2(\Omega)$ tel que quel que soit $k \in \mathbb{N}_*$,

$$\langle v_k, w \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad (7.3)$$

on a $w = 0$. Supposons que le résultat soit établi pour Ω de dimension $N - 1$. On introduit la fonction $\tilde{w} \in L^2(]0, L_N[)$ définie par

$$\tilde{w}(x_N) = \int_{\tilde{\Omega}} w(x) \prod_{p < N} u_{k_p}(x_p) d\tilde{x},$$

où $\tilde{\Omega} =]0, L_1[\times \dots \times]0, L_{N-1}[$ et $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{N-1})$. D'après 7.3, pour tout $k \in \mathbb{N}_*$, on a

$$\int_0^{L_N} \tilde{w}(x_N) u_{N,k}(x_N) dx_N = 0.$$

Comme la famille $u_{N,k} / \sqrt{\pi / L_p}$ forme une base de $L^2(]0, L_N[)$, on en déduit que $w(x_N) = 0$ pour presque tout x_N . Ainsi, pour presque tout $x_N \in]0, L_N[$, la fonction $w_{x_N}(\tilde{x}) = w(\tilde{x}, x_N) \in L^2(\tilde{\Omega})$ est telle que

$$\int_{\tilde{\Omega}} w_{x_N}(\tilde{x}) \prod_{p < N} u_{k_p}(x_p) d\tilde{x} = 0,$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $w_{x_N} = 0$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 7.3.4 On considère à nouveau un ouvert Ω parallélépipédique comme dans l'Exercice 7.3.3. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann sur tout le bord $\partial\Omega$.

Correction.

Les fonctions propres du Laplacien 1D avec conditions de Neumann sur $]0, 1[$ sont les fonctions

$$u_k(x) = \cos(k\pi x)$$

de valeurs propres $k^2\pi^2$. En suivant le même raisonnement que lors de l'Exercice , on montre que les fonctions propres du Laplacien avec conditions de Neumann sur $\Omega =]0, L_1[\times \dots \times]0, L_p[$ sont de la forme

$$u_k(x) = \prod_{p=1}^N \cos(k_p \pi x_p / L_p)$$

où $k \in \mathbb{N}^N$. La valeur propre associée à u_k étant

$$\lambda_k = \left(\prod_{p=1}^N k_p \pi / L_p \right)^2.$$

Exercice 7.3.5 On reprend les notations et les hypothèses du Théorème 7.3.6. Montrer que la meilleure (i.e. la plus petite) constante C dans l'inégalité de Poincaré (voir la Proposition 4.3.10) est précisément la première valeur propre λ_1 de (7.16).

Correction.

Soit u_k , base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.16) et λ_k les valeurs propres associées (ordonnées par ordre croissant). Soit u un élément de $H_0^1(\Omega)$.

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_k |\langle u, u_k \rangle_{L^2}|^2 \leq \lambda^{-1} \sum_k \lambda_k |\langle u, u_k \rangle_{L^2}|^2 = \lambda^{-1} \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Ainsi, l'inégalité de Poincaré (4.9), p.81 est vérifiée pour $C = \lambda_1^{-1}$. Cette valeur est optimale car $\|u_1\|_{L^2}^2 = \lambda_1^{-1} \|\nabla u_1\|_{L^2}^2$.

Exercice 7.3.6 Soit Ω un ouvert borné régulier et connexe. Montrer que la première valeur propre du Laplacien dans Ω avec condition aux limites de Neumann est nulle et qu'elle est simple.

Correction.

Tout d'abord, zéro est valeur propre du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann car

$$\Delta 1 = 0.$$

Si λ est une valeur propre du Laplacien de fonction propre u , on a

$$\|\nabla u\|_{L^2} = \lambda \|u\|_{L^2}.$$

Ainsi, les valeurs propres du Laplacien avec conditions aux bords de Neumann sont strictement positives sauf si $\|\nabla u\|_{L^2} = 0$ auquel cas $\lambda = 0$. Comme Ω est connexe, si $\lambda = 0$ la fonction u est constante. Ainsi, la première valeur propre du Laplacien est 0 et elle est simple.

Exercice 7.3.7 Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de classe C^1 de \mathbb{R}^N . Montrer qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini, et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)^N$ $(u_k)_{k \geq 1}$, telle que chaque u_k appartient à $H_0^1(\Omega)^N$, et il existe une famille de pressions $p_k \in L^2(\Omega)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \nabla p_k - \mu \Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{p.p. dans } \Omega \\ \operatorname{div} u_k = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u = 0_k & \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Correction. On introduit l'espace de Hilbert

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N : \operatorname{div} v = 0 \text{ p.p dans } \Omega\}.$$

On munis V du produit scalaire

$$a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

L'injection de V dans $L^2(\Omega)^N$ étant compacte (d'après le Théorème de Rellich), il existe une famille positive et croissante de valeurs propres λ_k et $u_k \in V$ une base de $L^2(\Omega)^N$ tels que

$$a(u_k, v) = \lambda_k \int_{\Omega} u_k \cdot v dx \text{ pour tout } v \in V.$$

Pour tout k , on définit la forme linéaire continue L_k sur $H_0^1(\Omega)^N$ par

$$L_k(v) = \lambda_k \int_{\Omega} u_k \cdot v dx - a(u_k, v)$$

La forme linéaire L_k s'annule sur V et d'après de Théorème de de Rahm **5.3.9**, **p.137**, il existe $p_k \in L^2(\Omega)$ tel que

$$L_k(v) = \int_{\Omega} p_k \operatorname{div} v dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

On en déduit en procédant comme lors de la résolution du problème de Stokes que

$$-\mu \Delta u + \nabla p_k = \lambda_k u_k \text{ dans } \Omega$$

(Attention, dans cette expression, la somme $-\mu \Delta u + \nabla p_k$ appartient à $L^2(\Omega)$, ce qui n'est pas forcément le cas de chacun des termes sans hypothèses supplémentaires sur la régularité de Ω). Par définition, comme les éléments u_k appartiennent à V ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_k) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \text{et } u_k &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Exercice 7.3.8 On considère le problème aux valeurs propres pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel quadratique $V(x) = Ax \cdot x$ où A est une matrice symétrique définie positive (modèle de l'oscillateur harmonique)

$$-\Delta u + Vu = \lambda u \text{ dans } \mathbb{R}^N. \quad (7.4)$$

On définit les espaces $H = L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$V = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } |x|v(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Montrer que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 u(x)v(x) dx,$$

et que l'injection de V dans H est compacte. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini et une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^N)$ $(u_k)_{k \geq 1}$ qui sont les valeurs propres et les fonctions propres de (7.20). Calculer explicitement ses valeurs et fonctions propres (on cherchera u_k sous la forme $p_k(x) \exp(-Ax \cdot x/2)$ où p_k est un polynôme de degré $k - 1$). Interpréter physiquement les résultats.

Correction.

1. V est un Hilbert

Tout d'abord, il est évident que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ définit bien un produit scalaire sur V . Reste à montrer que V muni de la norme associé est complet pour prouver que V est un espace de Hilbert. Soit B_1 la boule unité de \mathbb{R}^N et B_2 la boule de rayon 2. Par un raisonnement par l'absurde, on montre aisément qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\int_{B_2} |u|^2 dx \leq C \left(\int_{B_2} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_2/B_1} |u|^2 dx \right).$$

On en déduit que pour $u \in V$,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_V.$$

Ainsi, si u_n est une suite de Cauchy de V , elle est également une suite de Cauchy de H^1 . Il existe donc $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telle que u_n converge vers u dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ fort. Enfin, $|x|u_n$ étant elle-même une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, elle converge dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers une limite v de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Enfin, $|x|u_n$ converge faiblement vers $|x|u$, en effet, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|u_n(x)\phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|u(x)\phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} v(x)\phi(x) dx. \end{aligned}$$

On en déduit que $v = |x|u$ et que u_n converge vers u dans V .

2. Compacité

Soit u_n une suite bornée de V , $\|u_n\|_V < M$, il existe une sous-suite et u telle que u_n converge vers u dans L^2 sur toute boule. De plus, $|x|u$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$. Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u - u_n|^2 dx &< \int_{|x| < A} |u - u_n|^2 dx + 1/A^2 \int_{|x| > A} |x|^2 |u - u_n|^2 dx \\ &< \int_{|x| < A} |u - u_n|^2 dx + 2/A^2 M. \end{aligned}$$

On en déduit que u_n converge vers u dans L^2 fort. Ainsi, l'injection de V dans H est compacte.

3. Fonctions propres

On pose

$$a(u, v) = \int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + (Ax \cdot x)u(x)v(x) dx.$$

C'est une forme bilinéaire, continue et coercive sur V . On déduit donc du Théorème **7.3.2** qu'il existe une base hilbertienne de L^2 formée de vecteurs propres u_k de (7.20) et dont les valeurs propres associées λ_k sont positives et convergent vers l'infini.

Exercice 7.3.9 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . On considère le problème de vibrations pour l'équation des plaques avec condition aux limites d'encastrement

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de valeurs propres positives qui tend vers l'infini et une base hilbertienne dans $L^2(\Omega)$ de fonctions propres $(u_k)_{k \geq 1}$ qui appartiennent à $H_0^2(\Omega)$.

Correction.

On introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx.$$

continue et coercive sur $H_0^2(\Omega)$. Comme l'injection de $H_0^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, la conclusion découle de l'application du Théorème **7.3.2**.

7.4 Méthodes numériques

Exercice 7.4.1 On considère le problème aux valeurs propres en dimension $N = 1$

$$\begin{cases} -u_k'' = \lambda_k u_k & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u_k(0) = u_k(1) = 0. \end{cases}$$

On se propose de calculer la matrice de masse pour la méthode des éléments finis P_1 . On reprend les notations de la Section **6.2**. Montrer que la matrice de masse \mathcal{M}_h est donnée par

$$\mathcal{M}_h = h \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix},$$

et que ses valeurs propres sont

$$\lambda_k(\mathcal{M}_h) = \frac{h}{3} (2 + \cos(k\pi h)) \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Montrer que, si on utilise la formule de quadrature (6.46), alors on trouve que $\mathcal{M}_h = h \text{Id}$. Dans ce dernier cas, calculer les valeurs propres du problème spectral discret.

Correction. La matrice de masse \mathcal{M}_h est définie par

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x) dx,$$

où ϕ_i sont les fonctions de base des éléments finis P_1 . Pour tout i et j tels que $|i - j| > 1$, les support de ϕ_i et ϕ_j sont disjoints et

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = 0.$$

Si $j = i + 1$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M})_{ij} &= \int_{ih}^{(i+1)h} \phi_i(x)\phi_{i+1}(x) dx \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{((i+1)h - x)}{h} \frac{x - ih}{h} dx \\ &= h^{-2} \int_0^h (h - x)x dx \\ &= h/6. \end{aligned}$$

Enfin, si $i = j$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_h)_{ij} &= \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} |\phi_i(x)|^2 dx \\ &= 2 \int_{ih}^{(i+1)h} \left| \frac{(i+1)h - x}{h} \right|^2 dx \\ &= 2h^{-2} \int_0^h |h - x|^2 dx \\ &= 2h/3. \end{aligned}$$

On a donc montré que la matrice de masse obtenue par la méthode des éléments finis P_1 est

$$\mathcal{M}_h = h \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Soit $(U, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{M}_h U = \lambda U \tag{7.5}$$

et $U \neq 0$. On introduit la fonction u_h de périodique de période 2, impaire, définie sur $[0, 1]$ par

$$u_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2n[\\ U_k & \text{si } x \in [k/n - 1/2n, k/n + 1/2n[\\ 0 & \text{si } x \in [1 - 1/2n, 1[\end{cases} \tag{7.6}$$

D'après 7.5, pour tout $x \in \mathcal{R}$, on a

$$h \frac{u_h(x-h) + 4u_h(x) + u_h(x+h)}{6} = \lambda u_h(x). \quad (7.7)$$

Comme u_h est périodique de période 2, il existe \hat{u}_k tel que

$$u_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{ik\pi x}.$$

En appliquant la transformée de Fourier à 7.7, on obtient

$$h \frac{e^{-ikh\pi} \hat{u}_k + 4\hat{u}_k + e^{ki\pi/n} \hat{u}_k}{6} = \lambda \hat{u}_k,$$

c'est à dire

$$(\cos(k\pi h) + 2 - 3\lambda/h) \hat{u}_k = 0.$$

Comme $U \neq 0$, il existe au moins un k tel que

$$\cos(k\pi h) + 2 - 3\lambda/h = 0$$

ou encore tel que

$$\lambda = \frac{h}{3}(2 + \cos(kh\pi)).$$

Ainsi, toute valeur propre de \mathcal{M}_h est de la forme

$$\lambda_k = \frac{h}{3}(2 + \cos(kh\pi)), \quad \text{où } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Réciproquement, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, les fonctions $u_h(x)$ vérifiant l'équation 7.7 avec $\lambda = \lambda_k$ sont de la forme de la forme

$$u_h(x) = \sum_j \hat{u}_{k+2nj} e^{i(k+2nj)\pi x} + \hat{u}_{-(k+2nj)} e^{i(k+2nj)\pi x}.$$

Afin que u_h soit définie à partir d'un vecteur $U \in \mathbb{R}^n$ par 7.6, il est nécessaire que u_h soit impaire, à valeur réelles. On en déduit qu'on a alors

$$\hat{u}_{k+2nj} = -\hat{u}_{-(k+2nj)},$$

et que les coefficients de Fourier \hat{u}_m sont imaginaires pures. On en déduit qu'il existe une suite a_j de réels telle que

$$u_h(x) = \sum_j a_j \sin((k+2nj)\pi x).$$

Ainsi, si $\mathcal{M}_h U = \lambda_k U$, on a

$$U_p = \sum_j a_j \sin((k+2nj)\pi p h) = \sum_j a_j \sin(khp\pi + 2\pi j p) = (\sum_j a_j) \sin(khp\pi).$$

Comme \mathcal{M}_h est symétrique, définie positive, elle admet une base de vecteurs propres. Les seules valeurs propres possibles sont les n λ_k . A chacune de ces valeurs propres, on peut associer au plus un vecteur propres. Ainsi, il ne peut y avoir de valeur propre double. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathcal{M}_h U^k = \lambda_k U^k,$$

où $U^k = (\sin(khp\pi))_p$.

On note $\widetilde{\mathcal{M}}_h$ la matrice de masse obtenue par la formule de quadrature (6.46). Pour tout entier i et j , on obtient

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_h)_{ij} = \sum_{k=1}^n h/2(\phi_i(hk)\phi_j(hk) + \phi_i(h(k+1))\phi_j(h(k+1))) = h \sum_{k=1}^n \delta_i^k \delta_j^k = h\delta_i^j.$$

En utilisant la matrice de masse ainsi obtenue, les valeurs propres et vecteur propres du problème spectral discret vérifient

$$\mathcal{K}_h U_h = h\lambda_h U_h,$$

où

$$\mathcal{K}_h = h \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En déduit des valeurs propres de \mathcal{K}_h et de la relation

$$\mathcal{K}_h = 5h \text{Id} - 6\mathcal{M}_h$$

que les valeurs propres du problème spectrales sont de la forme

$$\lambda_h = 1 - 2 \cos(kh\pi),$$

et $k \in \{1, \dots, n\}$.