

Chapitre 8

PROBLEMES D'EVOLUTION

8.1 Motivation et exemples

8.2 Existence et unicité dans le cas parabolique

Exercice 8.2.1 On suppose que les hypothèses du Théorème **8.2.7** sont vérifiées.

1. En supposant que la solution u de **(8.13)** est assez régulière dans $]0, T[\times \Omega$, montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0(x)^2 dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u(x, s) dx ds. \end{aligned} \quad (8.1)$$

2. Démontrer la propriété suivante, appelée "lemme de Gronwall" : si z est une fonction continue de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^+ telle que

$$z(t) \leq a + b \int_0^t z(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

où a, b sont deux constantes positives ou nulles, alors

$$z(t) \leq a e^{bt} \quad \forall t \in [0, T].$$

3. En appliquant le lemme de Gronwall avec $z(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx$, déduire de **(8.17)** que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds &\leq \frac{e^t}{2} \left(\int_{\Omega} u_0(x)^2 dx \right. \\ &\left. + \int_0^T \int_{\Omega} f(x, s)^2 dx ds \right). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Correction.

– En intégrant le produit de l'équation d'évolution par u sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u - \Delta u u dx = \int_{\Omega} f u dx.$$

Par intégration par parties et en échangeant l'opérateur de dérivation en temps et intégrale, il vient

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx.$$

Il suffit alors d'effectuer une intégration en temps pour obtenir l'égalité désirée.

– Soit $v(t) = a + b \int_0^t z(s) ds$. La fonction v est de classe \mathcal{C}^1 et

$$v'(t) = bz(t) \leq bv(t).$$

Ainsi,

$$(v(t) \exp(-bt))' = \exp(-bt)(v'(t) - bv(t)) \leq 0$$

et $v(t) \exp(-bt) \leq v(0) = a$. Comme $z(t) \leq v(t)$, on a montré que

$$z(t) \leq a \exp(bt).$$

– On pose

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx,$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^2 dx ds \right)$$

et $b = 1$. D'après l'égalité d'énergie établie précédemment, pour tout $0 < t < T$,

$$\begin{aligned} & z(t) + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 + |u(x, s)|^2 dx ds \right) \\ & \leq a + \int_0^t z(s) ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall,

$$a + \int_0^t z(s) ds \leq a \exp(t).$$

Cette inégalité combinée à la précédente implique que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right) e^t. \end{aligned}$$

Exercice 8.2.2 Au vu de **(8.14)**, où la constante C est indépendante de T , on voit que le terme e^t n'est certainement pas optimal dans la majoration **(8.18)**. Cette estimation peut être améliorée en raisonnant de la façon suivante, avec une variante du lemme de Gronwall.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $g \in L^2(]0, T[)$ tel que $g \geq 0$. Montrer que, si $z(t)$ est continue de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^+ et vérifie

$$z(t) \leq a + 2 \int_0^t g(s) \sqrt{z(s)} ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$z(t) \leq \left(\sqrt{a} + \int_0^t g(s) ds \right)^2 \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Dédurre de **(8.17)** que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \leq \left(\left(\int_{\Omega} u_0(x)^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t ds \left(\int_{\Omega} f(x, s)^2 dx \right)^{1/2} \right)^2. \quad (8.3)$$

Correction.

- On suppose dans un premier temps que g est une fonction régulière. Soit ε un réel strictement positif. On pose

$$v(t) = \varepsilon + a + 2 \int_0^t g(s) \sqrt{z(s)} ds.$$

Comme $g(s) \sqrt{z(s)}$ est une fonction régulière, la fonction v est dérivable et $v'(t) = 2g(t) \sqrt{z(t)}$. Comme $z(t) \leq v(t)$ et que g est une fonction positive,

$$v'(t) \leq 2g(t) \sqrt{v(t)}.$$

Enfin, $v(t) > 0$, ainsi d'après l'inégalité précédente, $v'(t)/2\sqrt{v(t)} \leq g(t)$ et par intégration, on obtient

$$\sqrt{v(t)} - \sqrt{v(0)} \leq \int_0^t g(s) ds.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$z(t) \leq a + \varepsilon + 2 \int_0^t g(s) ds \leq \left(\sqrt{a + \varepsilon} + \int_0^t g(s) ds \right)^2.$$

Il suffit de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro pour obtenir l'inégalité désirée.

Dans le cas général, on raisonne par densité. Soit $g \in L^2(]0, T[)$ tel que

$g \geq 0$ presque partout. Il existe une suite de fonctions régulières g_n positives, convergeant vers g dans $L^2(]0; T[)$. Pour tout n , on a pour tout $t \in [0; T]$,

$$z(t) \leq a + \|g_n - g\|_{L^2(]0; T[)} \|z\|_{L^1(]0; T[)}^{1/2} + 2 \int_0^t g_n(s) \sqrt{z(s)} ds.$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} z(t) &\leq a + \|g_n - g\|_{L^2(]0; T[)} \|z\|_{L^1(]0; T[)}^{1/2} + 2 \int_0^t g_n(s) \sqrt{z(s)} ds \\ &\leq \left(\sqrt{a + \|g_n - g\|_{L^2(]0; T[)} \|z\|_{L^1(]0; T[)}^{1/2}} + \int_0^t g_n(s) ds \right)^2. \end{aligned}$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini pour conclure.

– D'après l'égalité d'énergie (8.17) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ &\leq \int_{\Omega} u_0(x)^2 dx + 2 \int_0^t \left(\int_{\Omega} f(x, s)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} u(x, s)^2 dx \right)^{1/2} ds \end{aligned}$$

On applique la variante du Lemme de Gronwall avec

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ g(s) &= \left(\int_{\Omega} f(x, s)^2 dx \right)^{1/2} \\ a &= \int_{\Omega} u_0(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ &\leq \left(\left(\int_{\Omega} u_0(x)^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t \left(\int_{\Omega} f(x, s)^2 dx \right)^{1/2} ds \right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 8.2.3 On suppose que les hypothèses du Théorème 8.2.7 sont vérifiées, que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, et que la solution u de (8.13) est assez régulière dans $]0, T[\times \Omega$. Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^2 dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Correction. En multipliant l'équation (8.13) vérifiée par u par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on obtient, suite à une intégration sur Ω que

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx.$$

Par intégration par parties, il vient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, s) \cdot \frac{\partial \nabla u}{\partial t}(x, s) dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx,$$

ou encore en échangeant les signes dérivation et intégrale,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx \right) + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx.$$

Il suffit d'intégrer cette dernière équation suivant t pour obtenir l'égalité recherchée.

Exercice 8.2.4 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$. Montrer que l'équation de la chaleur avec condition aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } x \in \Omega \end{cases} \quad (8.5)$$

admet une unique solution $u \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Correction. On applique le Théorème (8.2.3) à $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et à la forme bilinéaire symétrique, continue sur V

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ n'est pas coercive, mais $a(u, v) + \langle u, v \rangle_{L^2}$ étant coercive sur V , les conclusions du théorème restent valables d'après la remarque (8.2.5). Le problème (8.21) admet donc une unique solution

$$u \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Exercice 8.2.5 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Soit $A(x)$ une fonction de Ω dans l'ensemble des matrices symétriques réelles telles qu'il existe deux constantes $\beta \geq \alpha > 0$ vérifiant

$$\beta |\xi|^2 \geq A(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$. Montrer que le problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega, \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Correction. On applique le Théorème (8.2.3) à $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$, muni de la forme bilinéaire symétrique, définie positive et coercive

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

8.3 Existence et unicité dans le cas hyperbolique

Exercice 8.3.1 On suppose que les hypothèses du Théorème 8.3.5 sont vérifiées.

1. En supposant que la solution u de (8.34) est assez régulière dans $]0, T[\times \Omega$, montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega} u_1(x)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $C(T)$ (indépendante des données autre que T) telle que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq C(T) \left(\int_{\Omega} u_1(x)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s)^2 dx ds \right).$$

3. Montrer qu'il existe une constante C (indépendante de toutes les données y compris T) telle que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} u_1(x)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} f(x, s)^2 dx \right)^{1/2} ds \right)^2 \right).$$

Correction.

- Supposons que u soit une solution suffisamment régulière, de l'équation des ondes. On a

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u = f u.$$

Par intégration sur le domaine Ω , il vient en échangeant le signe somme et intégral (ce qui est licite pour u régulière) que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot u dx.$$

Par intégration en temps, on obtient l'égalité voulue.

– D'après l'inégalité de Shwarz,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds \\ & \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} f(x, s)^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^{1/2} dx ds \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, s) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité à l'égalité précédemment obtenue, on obtient que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} |u_1(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, s) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \end{aligned}$$

D'après le Lemme de Gronwall (voir Exercice **8.2.1**), on en déduit que pour tout $t \leq T$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ & \leq e^t \left(\int_{\Omega} |u_1(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f^2(x, s) dx ds \right) \end{aligned}$$

– De l'égalité obtenue dans la première partie de l'exercice, on déduit à l'aide de l'inégalité de Shwarz que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} |u_1(x)|^2 + |\nabla u_0|^2 dx + \int_0^t \left(\int_{\Omega} f^2(x, s) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \right)^{1/2} ds. \end{aligned}$$

D'après la variante du Lemme de Gronwall (voir Exercice **8.2.2**),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ & \leq \left(\left(\int_{\Omega} |u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t \left(\int_{\Omega} f^2(x, s) dx \right)^{1/2} ds \right)^2 \end{aligned}$$

d'où on déduit l'estimation recherchée avec $C = 2$ (il suffit d'utiliser l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$).

Exercice 8.3.2 On suppose que les hypothèses du Théorème **8.3.5** sont vérifiées, que le terme source est nul $f = 0$ et que la solution u de **(8.34)** est régulière dans $[0, T] \times \Omega$. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \right|^2 \right) dx = 0.$$

Correction. Il suffit de remarquer que $\partial^m u \partial^m t$ est lui-même solution d'une équation d'onde avec conditions de Dirichlet homogènes au bord, sans terme force.

Exercice 8.3.3 On suppose que les hypothèses du Théorème **8.3.7** sont vérifiées. En supposant que la solution u de **(8.38)** est assez régulière dans $]0, T[\times \Omega$, montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)^2 dx &= \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx \\ + \mu \int_{\Omega} |e(u_0)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} u_0)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx ds. \end{aligned}$$

En déduire une estimation d'énergie.

Correction.

8.4 Propriétés qualitatives dans le cas parabolique

Exercice 8.4.1 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . On note u_1 la première fonction propre du Laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet, λ_1 la valeur propre associée. On rappelle que l'on peut choisir $u_1 > 0$ dans Ω (voir le Théorème de Krein-Rutman **7.3.11**) et on admettra que l'on a aussi $\partial u_1 / \partial n > 0$ sur $\partial \Omega$. Soit $f = 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u l'unique solution (supposée régulière) de **(8.13)**.

Soit $\epsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver une constante positive K telle que

$$-Ku_1(x) \leq u(x, \epsilon) \leq Ku_1(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (8.6)$$

et en déduire qu'il existe une constante positive C telle que

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x, t)| \leq Ce^{-\lambda_1 t} \quad \forall t > \epsilon. \quad (8.7)$$

Correction. Pour tout $\epsilon > 0$, $u(x, \epsilon)$ est une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Rappelons que $u_1(x)$ est également une fonction régulière sur $\overline{\Omega}$ et qu'elle est strictement positive sur Ω . En particulier, $|\partial u_1 / \partial n| > 0$ sur $\partial \omega$.

Soit

$$K_1 = \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x, \epsilon) \frac{\partial u_1}{\partial n}^{-1} \right| + 1.$$

On introduit les fonctions v_+ et v_- définies par

$$\begin{aligned} v_+(x) &= K_1 u_1(x) - u(x, \epsilon) \\ v_-(x) &= K_1 u_1(x) + u(x, \epsilon) \end{aligned}$$

On vérifie sans mal que $\partial v_{\pm}/\partial n > 0$ sur $\partial\Omega$. Il existe donc un voisinage ω de $\partial\Omega$ tel que pour tout $x \in \omega$,

$$v_{\pm}(x) \geq 0.$$

Il existe un compact $A \subset \Omega$ tel que $A \cup \omega = \Omega$. On pose

$$K_2 = \max_{x \in A} |u(x, \varepsilon)/u_1(x)|$$

et $K = \max(K_1, K_2)$. On vérifie sans peine que

$$-Ku_1(x) \leq u(x, \varepsilon) \leq Ku_1(x).$$

La fonction $\tilde{u}(x, t) = Ke^{-\lambda_1(t-\varepsilon)}u_1$ est une solution de l'équation de la chaleur **(8.13)**, p.227 sur $t > \varepsilon$ avec $f = 0$ et $\tilde{u}(x, \varepsilon) = Ku_1(x)$ comme condition initiale. Enfin, comme

$$-\tilde{u}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \tilde{u}(x, \varepsilon),$$

on déduit du principe du maximum de la Proposition **(8.4.1)** que

$$\tilde{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t)$$

pour tout $t \geq \varepsilon$. On a donc montré que

$$|u(x, t)| \leq \left(Ke^{\lambda_1\varepsilon} \max_{x \in \Omega} u_1(x) \right) e^{-\lambda_1 t}$$

Exercice 8.4.2 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_*^+)$, et $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega))$ l'unique solution de **(8.13)**. Montrer que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_*^+)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{D^2}{2N} \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_*^+)}, \quad (8.8)$$

où $D = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ est le diamètre de Ω . On pourra utilement introduire la fonction $\psi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta\psi = 1$ dans Ω .

Correction. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que

$$u(x) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{D^2}{2N} \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_*^+)}.$$

En appliquant ce résultat à $-u$ au lieu de u et en combinant les deux estimations obtenues, on prouve l'estimation souhaitée.

Introduisons la fonction u_+ solution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial t} - \Delta u_+ &= \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_*^+)} && \text{dans }]0; T] \\ u_+(x, t) &= 0 && \text{sur }]0; T[\times \partial\Omega \\ u_+(x, 0) &= \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

D'après le principe du maximum, $u \leq u_+$. Il suffit donc de prouver le résultat pour $u = u^+$. Soit ψ la solution du problème aux limites $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $-\Delta\psi = 1$. On pose $v = u_+ - \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)}\psi$. La fonction v est solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v &= 0 && \text{dans }]0; T] \\ v(x, t) &= 0 && \text{sur }]0; T[\times \partial\Omega \\ v(x, 0) &= \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} - \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)}\psi && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Comme $\psi \geq 0$, pour tout $x \in \Omega$ on a $v(x, 0) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ainsi, pour tout t ,

$$v(x, t) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (8.9)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'origine de \mathbb{R}^N appartient au bord de Ω . Comme

$$-\Delta|x|^2/(2N) = 1 = -\Delta\psi \text{ dans } \Omega$$

et

$$|x|^2/(2N) \geq 0 = \psi(x) \text{ sur } \partial\Omega,$$

$|x|^2/2N \geq \psi(x)$ et $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq D^2/2N$. On conclut en combinant cette dernière inégalité avec (8.9).

Exercice 8.4.3 (difficile) Démontrer rigoureusement la Proposition 8.4.4. Pour cela on introduira, pour tout entier $m \geq 0$, l'espace

$$W^{2m}(\Omega) = \{v \in H^{2m}(\Omega), v = \Delta v = \dots = \Delta^{m-1}v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (8.10)$$

que l'on munit de la norme $\|v\|_{W^{2m}(\Omega)}^2 = \int_\Omega |(\Delta)^m v|^2 dx$, dont on montrera qu'elle est équivalente à la norme de $H^{2m}(\Omega)$. On reprendra la démonstration du Théorème 8.2.3 en montrant que la suite (w_k) des sommes partielles est de Cauchy dans $C^\ell([\epsilon, T], W^{2m}(\Omega))$.

Correction.

La démonstration se fait par récurrence sur m . Pour $m = 1$, en posant $f = \Delta v$, le Théorème 5.2.25, p.120 de régularité nous dit exactement que, si $f \in L^2(\omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$ alors $v \in H^2(\Omega)$, c'est à dire que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

L'inégalité inverse est évidente, d'où l'équivalence des normes dans le cas $m = 1$. Supposons que $\|v\|_{W^{2(m-1)}(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{H^{2(m-1)}}$ pour les fonctions de $W^{2(m-1)}(\Omega)$. Le Théorème 5.2.25, p.120 nous dit aussi que

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq C\|\Delta v\|_{H^{2(m-1)}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

c'est à dire, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $v \in W^{2m}(\Omega)$,

$$\|v\|_{H^{2m}(\Omega)} \leq C\|\Delta v\|_{W^{2m-1}(\Omega)} = C\|\Delta^{m-1}(\Delta v)\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_{W^{2m}(\Omega)},$$

ce qui prouve que $\|v\|_{W^{2m}(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{H^{2m}(\Omega)}$ pour les fonctions de $W^{2m}(\Omega)$ (l'inégalité inverse est évidente).

Exercice 8.4.4 On reprend les hypothèses de la Proposition **8.4.8**. Soit $f(x) \in L^2(\Omega)$ et u la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans }]0, +\infty[\times \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Correction.

On pose $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - v(x)$. La fonction \tilde{u} est solution de l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet homogènes et condition initiale $\tilde{u}(x, 0) = u_0(x) - v(x)$. Ainsi, d'après la Proposition **8.4.8**,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Exercice 8.4.5 On reprend les hypothèses de la Proposition **8.4.8**. Montrer qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-\lambda_2 t} \quad \forall t > 1, \quad \text{avec } \alpha_1^0 = \int_{\Omega} u_0 u_1 dx, \quad (8.11)$$

où λ_k désigne la k -ème valeur propre du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet.

Correction.

On rappelle que la solution u de l'équation **(8.48)** est donnée par

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} u_k.$$

Ainsi,

$$u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} u_k.$$

et

$$\|u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1\|_{L^2(\Omega)} = e^{-\lambda_2 t} \left(\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k^0|^2 e^{-2(\lambda_k - \lambda_2)t} \right)^{1/2}.$$

Comme $\lambda_k - \lambda_2 \geq 0$, on en déduit que

$$\|u(t) - \alpha_1^0 e^{-\lambda_1 t} u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_2 t} \left(\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k^0|^2 \right)^{1/2} \leq e^{-\lambda_2 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

Exercice 8.4.6 Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $t > 0$, on note $S(t)u_0$ la fonction donnée par le second membre de (8.52). Vérifier que $S(t)$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. En posant $S(0) = \text{Id}$ (l'identité de $L^2(\mathbb{R}^N)$), vérifier que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs qui dépendent continûment de t , c'est-à-dire qu'ils vérifient $S(t+t') = S(t)S(t')$ pour $t, t' \geq 0$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N))$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}_*^+; L^2(\mathbb{R}^N))$, donnée par

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) ds,$$

c'est-à-dire

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{dy}{(2\pi t)^{N/2}} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} f(y, s) e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \frac{dy ds}{(2\pi(t-s))^{N/2}}.$$

Correction.

1. Étude de l'opérateur $S(t)$

On a

$$S(t)u_0 = \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

La linéarité de l'opérateur $S(t)$ est évidente. De plus, la norme $L^2(\mathbb{R}^N)$ de $S(t)u_0$ est égale à la norme $L^2(\mathbb{R}^N)$ de sa transformée de Fourier. Ainsi, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|S(t)u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}_0 e^{-|k|^2 t}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

et $S(t)$ est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pour tout t , on note $\hat{S}(t)u_0$ la transformée de Fourier de $S(t)u_0$. On a $\hat{S}(t)u_0 = \hat{u}_0 e^{-|k|^2 t}$. Ainsi,

$$\hat{S}(t+t')u_0 = \hat{u}_0 e^{-|k|^2 t} \cdot e^{-|k|^2 t'} = \hat{S}(t)u_0 e^{-|k|^2 t'} = \hat{S}(t')(S(t)u_0),$$

en appliquant la transformée de Fourier inverse, on obtient que

$$S(t+t')(u_0) = S(t')(S(t)u_0).$$

Ainsi, $S(t+t') = S(t')S(t)$. Reste à montrer que les opérateur $S(t)$ dépendent continûment de t . Comme $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi groupe, il suffit de vérifier cette propriété en $t = 0$, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t < T$ et tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

A nouveau, il est beaucoup plus simple de raisonner sur les transformées de Fourier, la relation ci-dessus étant équivalente à

$$\|\hat{u}_0 (e^{-|k|^2 t} - 1)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

qui est vérifiée dès que $t < T = -\frac{\ln(1-\varepsilon)}{|k|^2}$.

2. Équation de la chaleur non homogène

On pose

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

La fonction u (comme fonction de \mathbb{R}^+ à valeur dans $L^2(\mathbb{R}^N)$) est trivialement dérivable. Montrons que u est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ . Le premier terme de l'expression de u est dérivable, d'après la définition même de S et

$$\frac{\partial S(t)u_0}{\partial t} = -\Delta(S(t)u_0).$$

En effectuant un changement de variable sur le deuxième, il reste à prouver que

$$\int_0^t S(s)f(t-s)ds$$

est dérivable par rapport à t . Comme $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N))$, on en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t S(s)f(t-s)ds \right) = S(t)f(0) + \int_0^t S(s) \frac{\partial f}{\partial t}(t-s)ds.$$

On effectue à nouveau un changement de variable (dans l'autre sens cette fois), pour en déduire que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t S(s)f(t-s)ds \right) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s) \frac{\partial f}{\partial s}(s)ds.$$

Remarquons enfin que

$$S(t-s) \frac{\partial f}{\partial s}(s) = \frac{\partial S(t-s)f(s)}{\partial t} + \frac{\partial S(t-s)f(s)}{\partial s}.$$

Ainsi, on déduit que

$$\int_0^t S(s) \frac{\partial f}{\partial t}(t-s)ds = S(0)f(t) - S(t)f(0) - \int_0^t \Delta(S(t-s)f(s))ds.$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t S(t-s)f(s)ds = S(0)f(t) - \int_0^t \Delta(S(t-s)f(s))ds.$$

On a donc montré que u était dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t) - \Delta u.$$

Enfin, l'unicité est évidente, l'équation étant linéaire et de solution unique lorsque $f = 0$.

Exercice 8.4.7 (égalité d'énergie) Montrer que, pour tout $T > 0$,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, T)^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x, t)|^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)^2 dx.$$

Correction. On rappelle que la transformée de Fourier de ∇u est $ik\hat{u}$. Comme la transformée de Fourier est une isométrie de L^2 , on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|k\hat{u}\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(k)|^2 e^{-2|k|^2 T} dk + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^T |k|^2 |u_0(k)|^2 e^{-2|k|^2 t} dt dk \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(k)|^2 e^{-2|k|^2 T} dk - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} |u_0(k)|^2 e^{-2|k|^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(k)|^2 dk = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \end{aligned}$$

Exercice 8.4.8 (principe du maximum) Montrer que, si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad \forall t > 0.$$

Montrer que, si $u_0 \geq 0$ presque partout dans \mathbb{R}^N , alors $u \geq 0$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+$.

Correction.

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{\|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-y^2/4t} dy = \|u_0\|_\infty.$$

Enfin, d'après l'expression explicite de u en fonction de u_0 , il est évident que si $u_0 \geq 0$ presque partout, $u \geq 0$ presque partout.

Exercice 8.4.9 (effet régularisant) Montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+)$.

Correction.

D'après l'expression de la transformée de Fourier de u ,

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) e^{-|k|^2 t}.$$

Pour tout multi-indice α , $|k|^\alpha \hat{u}$ est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_*^+, L^2(\mathbb{R}^N))$. Ainsi, par transformation de Fourier inverse, $\partial^\alpha u$ est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_*^+, L^2(\mathbb{R}^N))$. En d'autres termes, pour tout entier m , u appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_*^+, H^m(\mathbb{R}^N))$. D'après les injections de Sobolev, on en déduit que $u(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_*^+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N))$. En effectuant une analyse similaire sur $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$, on en déduit que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+)$.

Exercice 8.4.10 (comportement asymptotique) Montrer que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Correction.

En appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue à l'expression explicite de u , on obtient que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Exercice 8.4.11 (vitesse de propagation infinie) Montrer que, si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(x, t) > 0$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+$.

Correction.

Soit $u_0 \geq 0$. Si il existe $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+$ tel que $u(x, t) = 0$, alors $u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} = 0$ pour presque tout y et $u_0(y) = 0$ presque partout.

8.5 Propriétés qualitatives dans le cas hyperbolique

Exercice 8.5.1 Soit $\eta > 0$. On considère l'équation des ondes amortie

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{p.p. dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{p.p. dans } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{p.p. dans } x \in \Omega. \end{cases} \quad (8.12)$$

On suppose que u est une solution suffisamment régulière de **(8.55)** et que f est nul après un temps fini. Montrer, à l'aide d'un lemme de Gronwall (voir l'Exercice **8.2.1**), que u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ décroissent exponentiellement vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini.

Correction.

On pose $v = e^{\eta t}u$. Si on suppose que u est régulière, v est également solution d'une équation des ondes. On vérifie en effet que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \eta \Delta v = \eta e^{\eta t} f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ v(x, 0) = v_0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_1 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

avec $v_0 = u_0$ et $v_1 = \eta u_1$. D'après la dernière estimation de l'Exercice **8.3.1**, p.236 appliquées à v , on obtient que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + \eta |\nabla v|^2 dx \\ & \leq C \left(\int_{\Omega} v_1^2 + |\nabla v_0|^2 dx + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} (\eta f(x, s)e^{\eta t})^2 dx \right)^{1/2} ds \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Comme f est nul pour t assez grand, le second membre est borné uniformément en temps. On en déduit que v et $\frac{\partial v}{\partial t}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$, d'où on déduit que les normes L^2 de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ décroissent en $e^{-\eta t}$.

Exercice 8.5.2 Soit $u(t, x)$ la solution, supposée suffisamment régulière, de l'équation des ondes (8.34). En l'absence de terme source, montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} E_0,$$

avec E_0 l'énergie initiale

$$E_0 = \int_{\Omega} |u_1(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0(x, t)|^2 dx.$$

Pour cela on multipliera l'équation (8.34) par u et on intégrera par parties.

Correction.

En multipliant l'équation des ondes par u , on obtient par intégration sur $\Omega \times]0, t[$ que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u(x, s) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds = 0.$$

En intégrant par parties en temps le premier terme de cette équation, on en déduit que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) dx - \int_{\Omega} u_1 \cdot u_0 dx - \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right|^2 dx ds \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_{\Omega} u_1 \cdot u_0 dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) dx \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

(En effet, $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) dx$ uniformément borné en temps). D'autre part, l'équation de conservation de l'énergie implique que

$$\frac{1}{t} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx ds \right) = E_0.$$

En sommant ces deux équations on obtient que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx$$

et

$$\frac{1}{t} \int_0^t \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

convergent vers $E_0/2$.

Exercice 8.5.3 On considère l'équation des ondes dans tout l'espace \mathbb{R}^N

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } x \in \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dans } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (8.13)$$

avec une donnée initiale (u_0, u_1) régulière et à support compact. Montrer que la solution $u(t, x)$ peut se mettre sous la forme

$$u(x, t) = (Mu_1)(x, t) + \left(\frac{\partial(Mu_0)}{\partial t} \right)(x, t),$$

où M est un opérateur de moyenne défini par

$$\text{si } N = 1, \quad (Mv)(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-t}^{+t} v(x - \xi) d\xi,$$

$$\text{si } N = 2, \quad (Mv)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| < t} \frac{v(x - \xi)}{\sqrt{t^2 - |\xi|^2}} d\xi,$$

$$\text{si } N = 3, \quad (Mv)(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi|=t} v(x - \xi) ds(\xi),$$

où $ds(\xi)$ est la mesure surfacique de la sphère. En déduire que la solution u en (t, x) ne dépend que des valeurs des données initiales u_0 et u_1 sur la boule $|x| \leq t$. (Pour savoir comment on trouve les expressions ci-dessus de l'opérateur M , nous renvoyons au cours de majeure [1].)

Correction.

On procède de manière identique dans les trois cas : dans un premier temps, on vérifie que pour toute fonction v ,

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(x, t) = \Delta(Mv)(x, t) \quad (8.14)$$

Pour tout couple (x, t) tel que $t > 0$. On en déduit que la fonction u définie à l'aide de Mu_1 et Mu_0 vérifie bien l'équation des ondes. Il reste à montrer qu'elle vérifie les conditions aux limites, c'est à dire que

$$\begin{aligned} Mv(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial Mv}{\partial t}(x, 0) &= v(x) \\ \frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Le cas $N = 1$ est essentiellement élémentaire. Etudions directement les cas $N = 2$ ou 3.

Cas N=2. Tout d'abord, on effectue un changement de variable afin de définir Mv à l'aide d'une intégrale dont le domaine est indépendant du temps. On a

$$Mv = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|<1} \frac{v(x-t\xi)t}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi.$$

Si on suppose que v est assez régulière, on peut échanger les opérateur d'intégration et de dérivation lors du calcul des dérivées partielle. On obtient

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|<1} \frac{t(D^2v(x-t\xi).\xi).\xi - 2\nabla v(x-t\xi).\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi$$

et

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|<1} \frac{\Delta v((x-t\xi))}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} t d\xi.$$

Afin de vérifié (8.14), on introduit, pour tout x et $t > 0$ fixés, la fonction $w(\xi) = v(x-t\xi)$. Des expressions de $\partial^2 Mv/\partial t^2$ et de $\Delta(Mv)$, on déduit que

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi t} \int_{|\xi|<1} \frac{(D^2w.\xi).\xi - 2\nabla w.\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi$$

et que

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{2\pi t} \int_{|\xi|<1} \frac{\Delta w}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi.$$

Soit r un réel strictement positif tel que $r < 1$. Par intégration par parties, on montre que

$$\int_{|\xi|<r} \frac{\Delta w}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi = - \int_{|\xi|<r} \frac{\nabla w.\nabla \xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi + \frac{1}{r(1-r^2)^{1/2}} \int_{|\xi|=r} (\nabla w.\xi) ds.$$

De même,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|<r} \frac{(D^2w.\xi).\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi = \\ - \int_{|\xi|<r} (\nabla w.\xi) \left(\frac{2}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-|\xi|^2)^{3/2}} \right) + \frac{r}{(1-r^2)^{1/2}} \int_{|\xi|=r} \nabla w.\xi ds. \end{aligned}$$

On effectue la soustraction de ces deux expressions, puis on fait tendre r vers 1. Les termes de bords tendent vers zéro, ce qui établit que

$$\int_{|\xi|<1} \frac{\Delta w - (D^2w.\xi).\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi = 2 \int_{|\xi|<1} \frac{\nabla w.\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi.$$

De l'expression des dérivées partielles de Mv en fonction de w , on en déduit que Mv vérifie l'équation des ondes. Reste à prouver que Mv vérifie bien les conditions aux limites annoncées en $t = 0$.

On a évidemment $Mv(t=0) = 0$. De plus,

$$\frac{\partial Mv}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{\|\xi\|<1} \frac{t\nabla v(x-t\xi).\xi + v(x-t\xi)}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial Mv}{\partial t}(x, t=0) = v(x) \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|<1} \frac{1}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi.$$

En passant en coordonnées polaires afin de calculer le terme intégrale, il vient

$$\frac{\partial Mv}{\partial t}(t=0) = v.$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(t=0) = -\frac{1}{\pi} \int_{|\xi|<1} \frac{\nabla v(x).\xi}{(1-|\xi|^2)^{1/2}} d\xi.$$

Par intégration par parties, on obtient que

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2}(t=0) = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|=1} (\nabla v(x).\xi)(1-|\xi|^2)^{1/2} d\xi = 0.$$

Cas N=3. On procède au calcul des dérivées partielles de Mv comme précédemment. Il vient

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} t(D^2v(x-t\xi).\xi).\xi - 2(\nabla v.\xi) d\sigma$$

et

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} t\Delta v(x-t\xi) d\sigma.$$

Soit (x, t) fixée tel que $t > 0$. On introduit la fonction $w(\xi) = v(x-t\xi)$. On a

$$\frac{\partial^2 Mv}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi|=1} (D^2w.\xi).\xi + 2(\nabla w.\xi) d\sigma$$

$$\Delta(Mv) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi|=1} \Delta w d\sigma.$$

Il suffit donc d'établir que

$$\int_{|\xi|=1} (D^2w.\xi + 2\nabla w - \Delta w\xi).\xi d\sigma = 0.$$

A cet effet, il suffit de remarquer que l'intégrale est le flux d'un champ de divergence nulle. Enfin, il est aisé de vérifier que Mv vérifie bien les conditions aux limites annoncées (pourvu qu'on sache que la surface de la sphère est 4π).

Exercice 8.5.4 On considère l'équation des ondes (8.56) dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec des conditions aux limites indéterminées mais homogènes, et une donnée initiale (u_0, u_1) régulière et à support compact dans Ω . Vérifier qu'il existe un temps $T > 0$ tel que sur l'intervalle $[0, T]$ la solution est encore donnée par les formules de l'Exercice 8.5.3.

Correction.

Soit K le support de u_0 et u_1 . Si T est inférieur à la distance de K à la frontière de Ω , la solution explicite donnée par l'exercice précédent est aussi solution de l'équation des ondes dans le domaine Ω . En effet, les conditions aux limites sont vérifiées, car $u(x, t)$ est nul dès que la distance de x à K est supérieure à t .

Exercice 8.5.5 (application musicale) En admettant que le son se propage selon l'équation des ondes, montrer qu'il n'est pas possible d'écouter de la musique (audible) dans un monde de dimension spatiale $N = 2$, alors que c'est (fort heureusement) possible en dimension $N = 3$.

Correction.

Il est impossible d'écouter une musique audible dans un monde à deux dimensions. En effet, toutes les ondes émises sont entendues en même temps par l'auditeur (et pas seulement celles émises à un instant donné).

8.6 Méthodes numériques dans le cas parabolique

Exercice 8.6.1 Montrer que le schéma de Crank-Nicholson et celui de Gear sont d'ordre 2 (en temps), tandis que le θ -schéma pour $\theta \neq 1/2$ est d'ordre 1.

Correction.Schéma de Crank-Nicholson et θ -schéma

Soit U la solution de l'équation différentielle (8.60). L'erreur de troncature du schéma du θ -schéma est

$$E(U) = \mathcal{M} \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t} + \mathcal{K}(\theta U(t_{n+1}) + (1 - \theta)U(t_n)) - \theta b(t_{n+1}) + (1 - \theta)b(t_n).$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t_n$, on obtient

$$E(U) = \left(\mathcal{M} \frac{dU}{dt} + \mathcal{K}U - b \right) (t_n) + \Delta t \left(\frac{\mathcal{M}}{2} \frac{d^2U}{dt^2} + \theta \left(\mathcal{K} \frac{dU}{dt} - \frac{db}{dt} \right) (t_n) \right) + (\Delta t)^2 \left(\frac{\mathcal{M}}{6} \frac{d^3U}{dt^3} + \frac{\theta \mathcal{K}}{2} \frac{d^2U}{dt^2} - \frac{\theta}{2} \frac{d^2b}{dt^2} \right) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

En exploitant l'équation vérifiée par U , on en déduit que

$$E(U) = \Delta t \frac{1 - 2\theta}{2} \left(\frac{db}{dt} - \mathcal{K} \mathcal{M}^{-1} (b - \mathcal{K}U) \right) (t_n) + (\Delta t)^2 \frac{1 - 3\theta}{6} \left((\mathcal{K} \mathcal{M}^{-1})^2 (b - \mathcal{K}U) + \mathcal{K} \mathcal{M}^{-1} \frac{db}{dt} + \frac{d^2b}{dt^2} \right) (t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

On en déduit que pour $\theta \neq 1/2$, le θ -schéma est d'ordre 1 en temps tandis que le schéma de Crank-Nicholson (qui correspond au cas $\theta = 1/2$) est d'ordre 2 en temps.

Schéma de Gear

Dans le cas du schéma de Gear, l'erreur de troncature est

$$E(U) = \mathcal{M} \frac{2U(t_{n+1}) - 4U(t_n) + U(t_{n-1}) + \mathcal{K}U(t_{n+1}) - b(t_{n+1})}{2\Delta t}.$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t_{n+1}$, on obtient

$$E(U) = \left(\mathcal{M} \frac{dU}{dt} + \mathcal{K}U - b \right) (t_{n+1}) + \frac{(\Delta t)^2}{3} \mathcal{M} \frac{d^3U}{dt^3} (t_{n+1}) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

Si U est solution de (8.60), on a donc

$$E(U) = \frac{(\Delta t)^2}{3} \mathcal{M} \frac{d^3U}{dt^3} (t_{n+1}) + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$

Le schéma de Gear est donc d'ordre 2 en temps.

Exercice 8.6.2 On considère le θ -schéma (8.61) avec $1/2 \leq \theta \leq 1$. On note $\|U\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\mathcal{M}U \cdot U}$. Démontrer l'équivalent discret suivant de l'inégalité d'énergie (8.18)

$$\|U^{n_0}\|_{\mathcal{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \mathcal{K} \hat{U}^n \cdot \hat{U}^n \leq C \left(\|U^0\|_{\mathcal{M}}^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \mathcal{O}(1) \right).$$

Pour cela, on prendra le produit scalaire de (8.61) avec $\hat{U}^n = \theta U^{n+1} + (1 - \theta)U^n$.

Correction. Notons que

$$2\mathcal{M}(U^{n+1} - U^n) \cdot (\theta U^{n+1} + (1 - \theta)U^n) = \|U^{n+1}\|_{\mathcal{M}}^2 - \|U^n\|_{\mathcal{M}}^2 + (2\theta - 1)\|U^{n+1} - U^n\|_{\mathcal{M}}^2$$

et pour tout $u \in V_{0h}$ de coordonnées U dans la base choisie de V_{0h} ,

$$\begin{aligned} b \cdot U &= \int_{\Omega} f u dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{K}U \cdot U + \frac{1}{2\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En effet, a est coercive de constante de coercivité $\alpha > 0$. On effectue le produit scalaire du θ -schéma (8.61) par $\tilde{U}^n = \theta U^{n+1} + (1 - \theta)U^n$. Si $\theta \geq 1/2$, en notant $\tilde{f}^n = \theta f(t_{n+1}) + (1 - \theta)f(t_n)$, on obtient

$$\frac{1}{2} (\|U^{n+1}\|_{\mathcal{M}}^2 - \|U^n\|_{\mathcal{M}}^2) + \Delta t \mathcal{K} \tilde{U}^n \cdot \tilde{U}^n \leq \Delta t \left(\frac{1}{2} \mathcal{K} \tilde{U} \cdot \tilde{U} + \frac{1}{2\alpha} \|\tilde{f}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

En sommant par rapport à n , on en déduit que

$$\|U^{n_0+1}\|_{\mathcal{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \mathcal{K} \tilde{U}^n \cdot \tilde{U}^n \leq \|U^0\|_{\mathcal{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \|\tilde{f}^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On conclut en notant, que comme $f(t)$ est supposé continue,

$$\sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \|\tilde{f}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathcal{O}(1).$$

Exercice 8.6.3 Montrer que le schéma de Gear **(8.63)** est inconditionnellement stable.

Correction. On note tout d'abord que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}).U^{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\|U^{n+1}\|_{\mathcal{M}}^2 - \|U^n\|_{\mathcal{M}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|2U^{n+1} - U^n\|_{\mathcal{M}}^2 - \|2U^n - U^{n-1}\|_{\mathcal{M}}^2 + \|U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}\|_{\mathcal{M}}^2 \right). \end{aligned}$$

On effectue le produit scalaire du schéma de Gear **(8.63)** par U^{n+1} et en traitant le second membre comme lors de l'Exercice **8.6.2** on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|U^{n+1}\|_{\mathcal{M}}^2 - \|U^n\|_{\mathcal{M}}^2 + \|2U^{n+1} - U^n\|_{\mathcal{M}}^2 - \|2U^n - U^{n-1}\|_{\mathcal{M}}^2) \\ + \Delta t \mathcal{K}U^{n+1}.U^{n+1} \leq \Delta t \left(\frac{1}{2} \mathcal{K}U^{n+1}.U^{n+1} + \frac{1}{2\alpha} \|f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

où $f^n = f(t_n)$. Par sommation, on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|U^{n_0+1}\|_{\mathcal{M}}^2 + \|2U^{n_0+1} - U^{n_0}\|_{\mathcal{M}}^2) + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \mathcal{K}U^{n+1}.U^{n+1} \\ \leq \frac{1}{2} (\|U^1\|_{\mathcal{M}}^2 + \|2U^1 - U^0\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \|f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Exercice 8.6.4 On résout par éléments finis P_1 et schéma explicite en temps l'équation de la chaleur **(8.13)** en dimension $N = 1$. On utilise une formule de quadrature qui rend la matrice \mathcal{M} diagonale (voir la Remarque **7.4.3** et l'Exercice **7.4.1**). On rappelle que la matrice \mathcal{K} est donnée par **(6.14)** et qu'on a calculé ses valeurs propres lors de l'Exercice **14.1.3**. Montrer que dans ce cas la condition CFL **(8.64)** est bien du type $\Delta t \leq Ch^2$.

Correction. La condition CFL **(8.64)** est toujours valable, même si \mathcal{M} n'est pas la matrice de masse exacte. Ainsi, le schéma est stable sous la condition CFL (on a $\theta = 0$)

$$\max_i \lambda_i \Delta t \leq 2,$$

où λ_i sont les valeurs propres de \mathcal{K} , c'est à dire

$$\lambda_i = 4h^{-2} \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right).$$

Comme $\lambda_i \leq 4h^{-2}$, on retrouve une condition CFL classique, c'est à dire

$$2\Delta t \leq h^2.$$

Exercice 8.6.5 Ecrire le système linéaire d'équations différentielles ordinaires obtenu par semi-discrétisation de l'équation des ondes amortie **(8.55)**.

Correction. Le problème discrétisé en espace consiste à déterminer $u(t)$ fonction de t à valeur dans V_{0h} tel que pour tout $v_h \in V_{0h}$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle u_h(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \eta \frac{d}{dt} \langle u_h(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u_h(t), \nabla v(t) \rangle = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)}$$

tel que

$$u_h(t=0) = u_{0,h} \text{ et } \frac{du_h}{dt}(t=0) = u_{1,h}.$$

Si ϕ_i désigne la base de V_{0h} si on note $U_i(t)$ les coordonnées de $u_h(t)$ dans cette base, on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{M}U(t) + \eta \frac{d}{dt} \mathcal{M}U(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t)$$

où \mathcal{M} est la matrice de masse $\mathcal{M} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$, \mathcal{K} la matrice de rigidité $\langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle$ et b le terme source $\langle f, \phi_j \rangle$.

8.7 Méthodes numériques dans le cas hyperbolique

Exercice 8.7.1 Montrer que le schéma de Newmark est d'ordre 1 (en temps) pour $\delta \neq 1/2$, d'ordre 2 pour $\delta = 1/2$ et $\theta \neq 1/12$, et d'ordre 4 si $\delta = 1/2$ et $\theta = 1/12$ (on se limitera à l'équation sans amortissement).

Correction.

On introduit l'erreur de troncature

$$\begin{aligned} E(U) = \mathcal{M} \frac{U(t + \Delta t) - 2U(t) + U(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \\ + \mathcal{K} \left(\theta U(t + \Delta t) + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) U(t) + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) U(t - \Delta t) \right) \\ - \left(\theta b(t + \Delta t) + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) b(t) + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) b(t - \Delta t) \right). \end{aligned}$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t_n$, on établit que

$$\begin{aligned} E(U) = \mathcal{M}U'' + \mathcal{K}U - b + \Delta t \left(\delta - \frac{1}{2} \right) (\mathcal{K}U' - b') \\ + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\delta}{2} + \theta \right) (\mathcal{K}U'' - b'') + \frac{(\Delta t)^2}{12} \mathcal{M}U^{(4)} \\ + \frac{(\Delta t)^3}{6} \left(\delta - \frac{1}{2} \right) (\mathcal{K}U^{(3)} - b^{(3)}) + \mathcal{O}((\Delta t)^4). \end{aligned}$$

Si U est solution de l'équation (8.69), on a

$$\mathcal{M}U'' + \mathcal{K}U - b = 0$$

et

$$KU'' - b'' = -\mathcal{M}U^{(4)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(U) = \Delta t \left(\delta - \frac{1}{2} \right) (\mathcal{K}U' - b') - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\delta}{2} + \theta - \frac{(\Delta t)^2}{12} \right) \mathcal{M}U^{(4)} \\ + \frac{(\Delta t)^3}{6} \left(\delta - \frac{1}{2} \right) (\mathcal{K}U^{(3)} - b^{(3)}) + \mathcal{O}((\Delta t)^4). \end{aligned}$$

On vérifie aisément sur l'expression de $E(U)$ que le schéma de Newmark est d'ordre 1 pour $\delta \neq 1/2$, d'ordre 2 pour $\delta = 1/2$ et $\theta \neq 1/12$ et d'ordre (au moins) 4 si $\delta = 1/2$ et $\theta = 1/12$.

Exercice 8.7.2 On considère le cas limite de la Proposition **8.7.1**, c'est-à-dire $\delta = 1/2$ et $\lambda_i (\Delta t)^2 = \frac{4}{1-4\theta}$. Montrer que le schéma de Newmark est instable dans ce cas en vérifiant que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}.$$

Remarquez qu'il s'agit d'une instabilité "faible" puisque la croissance de A^n est linéaire et non exponentielle.

Correction. On vérifie aisément par récurrence que

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}$$

On en conclut que le schéma de Newmark est instable dans ce cas (pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer le cas $b = 0$, $U_i^1 = U_i^0 = 1$)