

Chapitre 9

INTRODUCTION A L'OPTIMISATION

9.1 Motivation et exemples

Exercice 9.1.1 Montrer par des exemples que le fait que K est fermé ou que J est continue est en général nécessaire pour l'existence d'un minimum. Donner un exemple de fonction continue et minorée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} n'admettant pas de minimum sur \mathbb{R} .

Correction. Exemples de non-existence de minimum

- K non fermé : minimisation de $J(x) = x^2$ sur $]0, 1[$.
- J non continue : minimisation sur \mathbb{R} de $J(x) = x^2$ pour $x \neq 0$, $J(0) = 1$.
- J non coercive : minimisation sur \mathbb{R} de $J(x) = e^{-x}$.

Exercice 9.1.2 Montrer que l'on peut remplacer la propriété "infinie à l'infini" (9.3) par la condition plus faible

$$\inf_{v \in K} J(v) < \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\inf_{\|v\| \geq R} J(v) \right).$$

Correction. Soit (u^n) une suite minimisante de J sur K . Comme

$$\inf_{v \in K} J(v) < \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\inf_{\|v\| \geq R} J(v) \right),$$

et que $J(v_n)$ converge vers $\inf_{v \in K} J(v)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour n assez grand,

$$J(v_n) < \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\inf_{\|v\| \geq R} J(v) \right) - \delta.$$

Ainsi, il existe R tel que pour n assez grand,

$$J(v_n) < \inf_{\|v\| \geq R} J(v).$$

On en déduit que pour n assez grand, v appartient à la boule de rayon R . Autrement dit, la suite v_n reste bornée. La suite de la démonstration est alors identique à la démonstration initiale.

Exercice 9.1.3 Montrer que l'on peut remplacer la continuité de J par la semi-continuité inférieure de J définie par

$$\forall (u^n)_{n \geq 0} \text{ suite dans } K, \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n = u \implies \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u^n) \geq J(u).$$

Correction. Seul la fin de la démonstration est modifiée. La suite minimisante (u^{n_k}) converge vers u , mais cette fois on a seulement

$$J(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u^{n_k}) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Or comme $u \in K$, $\inf_{v \in K} J(v) \geq J(u)$, d'où

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Exercice 9.1.4 Montrer qu'il existe un minimum pour les Exemples **9.1.1**, **9.1.6** et **9.1.7**.

Correction. Les conditions du Théorème **9.1.3** sont trivialement satisfaites.

Exercice 9.1.5 Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes P de degré inférieur ou égal à n tels que $P(0) = 1$. Pour $P \in \mathcal{P}_n$, on note $\|P\| = \max_{x \in [a,b]} |P(x)|$.

1. Montrer que le problème

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|P\| \tag{9.1}$$

a une solution.

2. On rappelle que les polynômes de Tchebycheff $T_n(X)$ sont définis par les relations

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Montrer que le degré de T_n est égal à n et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. En déduire l'existence de $n+1$ réels

$$\xi_0^n = 1 > \xi_1^n > \xi_2^n > \dots > \xi_n^n = -1$$

tels que $T_n(\xi_k^n) = (-1)^k$ pour $0 \leq k \leq n$ et que $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1$.

3. Montrer que l'unique solution de **(9.4)** est le polynôme

$$P(X) = \frac{1}{T_n\left(\frac{b+a}{b-a}\right)} T_n\left(\frac{\frac{b+a}{2} - X}{\frac{b-a}{2}}\right).$$

Correction.

- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n tel que $P(0) = 1$ est un sous espace affine (et fermé) de l'ensemble de polynôme de degré inférieur ou égal à n muni de la norme $\max_{x \in [a,b]} |P(x)|$. Toutes les hypothèses du Théorème 10.1.3 sont satisfaites d'où on déduit l'existence d'une solution au problème de minimisation de $\|P\|$ sur \mathcal{P}_n .

- Par une récurrence facile, on montre que T_n est un polynôme de degré n et que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose $\xi_k^n = \cos(k\pi/n)$. On a $\xi_0^n = 1 > \xi_1^n > \dots > \xi_n^n = -1$. et $T_n(\xi_k^n) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Enfin,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |T_n(\cos(\theta))| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos(n\theta)| = 1.$$

- Soit R un polynôme de norme minimal appartenant à \mathcal{P}_n . On considère le polynôme $S = P - R$ où P est défini par la question 3. On veut montrer que $S = 0$. Pour tout $k = 0, \dots, n$, on pose $y_k = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right) \xi_k$. D'après la question précédente, $P(y_k) = (-1)^k \|P\|$. On définit les ensembles d'indices

$$\begin{aligned} I &= \{k \in \{0, \dots, n-1\} : S(y_k) \neq 0 \text{ et } S(y_{k+1}) \neq 0\} \\ J &= \{k \in \{1, \dots, n-2\} : S(y_k) = 0\} \\ K &= \{k \in \{0, n\} : S(y_k) = 0\}. \end{aligned}$$

On vérifie que $|I| = n - 2|J| - |K|$. Pour tout $k \in J$, on a $|R(y_k)| = \|P\| \geq \|R\|$, d'où $\|R\| = |R(y_k)|$ et $R'(y_k) = 0$. De plus, $P'(y_k) = 0$, d'où $S'(y_k) = 0$. De même, pour tout $k \in J$, comme $\|P\| \geq \|R\|$, le signe de $S(y_k) = P(y_k) - R(y_k)$ est égale au signe de $P(y_k) = \|P\|(-1)^k$. De manière similaire, le signe de $S(y_{k+1})$ est $(-1)^{k+1}$. Comme $S(y_k)$ et $S(y_{k+1})$ ont des signes opposés, le polynôme S s'annule sur l'intervalle $[y_k, y_{k+1}]$ au moins une fois.

Ainsi, pour tout $k \in I$, $S(y_k) = S'(y_k) = 0$, pour tout $k \in J$, il existe $x_k \in]y_k, y_{k+1}[$ tel que $S(x_k) = 0$ et pour tout $k \in K$, $S(y_k) = 0$. De plus $S(0) = 0$. Ainsi, S vérifie $2|I| + |J| + |K| + 1 = n + 1$ conditions différentes du type $S(x) = 0$ ou $S'(x) = 0$. Comme S est de degré au plus n , $S = 0$.

9.2 Existence d'un minimum en dimension infinie

Exercice 9.2.1 Modifier la construction précédente pour montrer qu'il n'existe pas non plus de minimum de J sur $C^1[0, 1]$.

Correction. On définit la fonction T par

$$T(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ |x| & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Pour tout entier $n > 0$, on note u la fonction $2/n$ périodique, définie par

$$u^n(x) = T(n^2x) \text{ pour } -1/n \leq x \leq 1/n.$$

La fonction u^n est de classe C^1 . Enfin, $u^n(x)$ tend vers zéro presque partout et $u^{n'}(x)$ tend vers 1 presque partout. Ces fonctions étant de plus bornées uniformément par rapport à n , on en déduit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim J(u_n) = 0.$$

Exercice 9.2.2 Soient J_1 et J_2 deux fonctions convexes sur V , $\lambda > 0$, et φ une fonction convexe croissante sur un intervalle de \mathbb{R} contenant l'ensemble $J_1(V)$. Montrer que $J_1 + J_2$, $\max(J_1, J_2)$, λJ_1 et $\varphi \circ J_1$ sont convexes.

Correction. La convexité de $J_1 + J_2$ comme de λJ_1 est triviale à établir.

$$\begin{aligned} \text{Epi}(\max(J_1, J_2)) &= \{(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V : \lambda \geq J_1(v) \text{ et } \lambda \geq J_2(v)\} \\ &= \text{Epi}(J_1) \cap \text{Epi}(J_2). \end{aligned}$$

L'intersection de deux convexes étant convexe, $\text{Epi}(\max(J_1, J_2))$ est convexe et $\max(J_1, J_2)$ est convexe.

Comme J est convexe et φ croissante,

$$\varphi \circ J(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \varphi(\theta J(x) + (1 - \theta)J(y)).$$

La convexité de φ nous permet d'en déduire la convexité de $\varphi \circ J$.

Exercice 9.2.3 Soit $(L_i)_{i \in I}$ une famille (éventuellement infinie) de fonctions affines sur V . Montrer que $\sup_{i \in I} L_i$ est convexe sur V . Réciproquement, soit J une fonction convexe continue sur V . Montrer que J est égale au $\sup_{L_i \leq J} L_i$ où les fonctions L_i sont affines.

Correction.

Exercice 9.2.4 Si J est continue et α -convexe, montrer que, pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(v) - \frac{\alpha\theta(1 - \theta)}{2} \|u - v\|^2. \quad (9.2)$$

Correction. Pour tout n , on note $K_n = \{x \in [0, 1] : 2^n x \in \mathbb{N}\}$. Supposons que l'inégalité soit vérifiée pour tout $\theta \in K_n$. Soit $\theta \in K_{n+1} - K_n$, il existe $\theta_1, \theta_2 \in K_n$ tels que $\theta_1 < \theta_2$ et $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Comme J est α -convexe,

$$\begin{aligned} J(\theta u + (1 - \theta)v) &= J\left(\frac{(\theta_1 u + (1 - \theta_1)v) + (\theta_2 u + (1 - \theta_2)v)}{2}\right) \\ &\leq \frac{J(\theta_1 u + (1 - \theta_1)v) + J(\theta_2 u + (1 - \theta_2)v)}{2} + \frac{\alpha}{8}(\theta_2 - \theta_1)^2 \|u - v\|^2 \\ &= \frac{J(\theta_1 u + (1 - \theta_1)v) + J(\theta_2 u + (1 - \theta_2)v)}{2} + \frac{\alpha}{8}(\theta_2 - \theta_1)^2 \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

L'inégalité ayant été supposée exacte sur K_n , on a donc

$$\begin{aligned} J(\theta u + (1 - \theta)v) &\leq \frac{\theta_1 J(u) + (1 - \theta_1)J(v) + \theta_2 J(u) + (1 - \theta_2)J(v)}{2} \\ &\quad + \frac{\alpha\theta_1(1 - \theta_1) + \alpha(\theta_2(1 - \theta_2))}{4} \|u - v\|^2 + \frac{\alpha}{8}(\theta_2 - \theta_1)^2 \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

et

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \frac{\theta J(u) + (1 - \theta)J(v)}{2} + \frac{\alpha(\theta_1 + \theta_2)(2 - (\theta_1 + \theta_2))}{8} \|u - v\|^2,$$

ce qui prouve que l'inégalité est alors valable pour tout $x \in K^{n+1}$. On en déduit par récurrence que l'inégalité est valable pour $\theta \in \bigcup_n K^n$. Comme J est continue, l'inégalité reste valable sur l'adhérence de l'union des K_n , c'est à dire sur $[0, 1]$.

Exercice 9.2.5 Soit A une matrice symétrique d'ordre N et $b \in \mathbb{R}^N$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $J(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$. Montrer que J est convexe si et seulement si A est semi-définie positive, et que J est strictement convexe si et seulement si A est définie positive. Dans ce dernier cas, montrer que J est aussi fortement convexe et trouver la meilleure constante α .

Correction. Pour tout x , on définit l'application f_x par $f_x(\lambda) = J(\lambda x)x = (x.Ax)\lambda^2 - (b.x)\lambda$. Si J est convexe, f_x est également convexe, c'est à dire $x.Ax \geq 0$. Ainsi, J convexe implique A semi-définie positive. Réciproquement, si A est semi-définie positive,

$$\begin{aligned} J((x+y)/2) &= (x+y).A(x+y)/4 - (b.x+y)b.y/2 \\ &= \frac{x.Ax - b.x + y.Ay - b.y}{2} - (x-y).A(x-y)/4 \\ &\leq (J(x) + J(y))/2. \end{aligned}$$

L'application J étant continue, elle est donc convexe.

Exercice 9.2.6 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev associé (voir la Définition 4.3.1). Soit la fonction J définie sur Ω par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v(x)|^2 + v(x)^2) dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que J est fortement convexe sur $H^1(\Omega)$.

Correction.

$$J((u+v)/2) \leq \frac{J(u) + J(v)}{2} - \|u - v\|_{H^1}^2/8.$$

Exercice 9.2.7 Soit $v_0 \in V$ et J une fonction convexe majorée sur une boule de centre v_0 . Montrer que J est minorée et continue sur cette boule.

Correction. Sans perte de généralité, on peut supposer que $v_0 = 0$ et $J(0) = 0$. Soit M un majorant de J sur la boule. Pour tout élément u de la boule, J étant convexe,

$$0 = J(0) \leq (J(u) + J(-u))/2.$$

Ainsi, pour tout u , $-J(u) \leq J(u) \leq M$ et J est minorée par $-M$ sur la boule étudiée.

Exercice 9.2.8 Montrer que le Théorème 9.2.6 s'applique à l'Exemple 9.1.10 (utiliser l'inégalité de Poincaré dans $H_0^1(\Omega)$).

Correction. D'après l'inégalité de Poincaré,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v|^2 dx$$

défini une norme sur H_0^1 . Ainsi, J est fortement convexe et le Théorème ... s'applique.

Exercice 9.2.9 Généraliser l'Exercice **9.2.8** aux différents modèles rencontrés au Chapitre **5** : Laplacien avec conditions aux limites de Neumann (voir la Proposition **5.2.16**), élasticité (voir l'Exercice **5.3.3**), Stokes (voir l'Exercice **5.3.10**).

Correction. Pas de Pb.