

Outils mathématiques - Optimisation

DEA IVR

Examen du 20 décembre 2002

Tous les documents sont autorisés

1 Un problème de navigation

Considérons le problème de navigation hypothétique suivant. Il s'agit de planifier une trajectoire optimale pour un véhicule, évoluant dans le plan $x-y$. Le but est de concevoir une trajectoire qui soit la plus courte possible, tout en passant le plus possible à proximité de quelques « points de contrôle ». Ces deux critères sont contradictoires, et il faut donc trouver un meilleur compromis. Nous utilisons les définitions suivantes. La trajectoire sera décrite par des ordonnées y_i , pour $i = 1, \dots, n$. On suppose qu'elle est composée des segments de droite formés par les points de passage successifs, donnés par :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

avec des abscisses x_i prédéfinies.

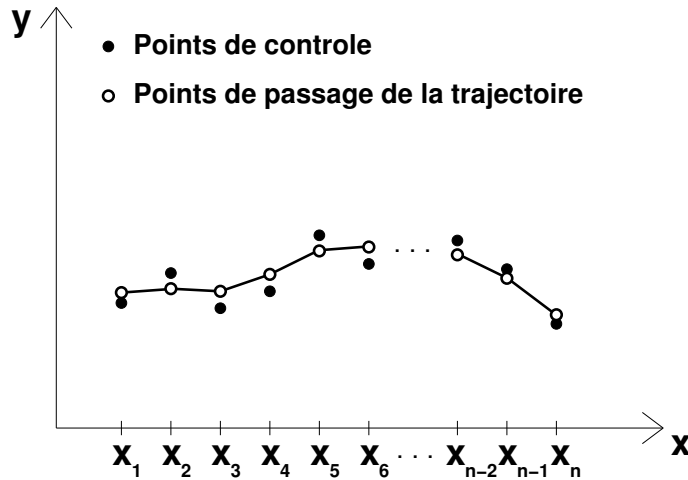
Les points de contrôle sont définis aux mêmes abscisses :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix}$$

Une première formulation du problème d'optimisation est la suivante :

$$\min_{y_1, \dots, y_n} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} [(x_j - x_{j+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2] \right\} \quad (1)$$

Le premier terme exprime la déviation de la trajectoire des points de contrôle, et le deuxième terme est lié à la longueur de la trajectoire. Le facteur α est un poids qui sert à régler l'importance qu'on attache aux deux critères contradictoires (plus il est important que la trajectoire soit courte, plus on donnera une valeur grande à α).



1.1 Question (a)

Le problème défini dans l'équation (1) est un problème de moindres carrés. Explicitez les résidus de la fonction de coût (négligez des termes qui sont constants).

1.2 Question (b)

Comment (avec quelle méthode) résoudriez-vous le problème (1)? Explicitez les ingrédients nécessaires pour la méthode choisie (par exemple, gradient, Jacobien, système d'équations linéaires, selon le cas).

1.3 Question (c)

Le problème, tel que formulé par l'équation (1), est relativement facile à résoudre. Pourtant, cette formulation n'est pas forcément satisfaisante, surtout en ce qui concerne le deuxième terme : il s'agit de la somme des *carrés* des longueurs des segments de la trajectoire. Nous nous imposons maintenant de résoudre une autre formulation du problème, basée sur la somme des longueurs *absolues* des segments :

$$\min_{y_1, \dots, y_n} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{(x_j - x_{j+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2} \right\} \quad (2)$$

Est-ce que ce problème peut être résolu par la même approche que vous avez indiquée pour la question (a)? Pourquoi (pas)?

Si une autre méthode est requise, laquelle utiliseriez-vous? Pour quelle(s) raison(s)? (Vous pouvez suggérer plusieurs méthodes possibles si vous voulez.)

Comment choisiriez-vous les valeurs initiales pour les variables y_i (donner une solution simple)?

2 Estimation d'un polynome

Etant donné un ensemble de n points, mesurés dans le plan :

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

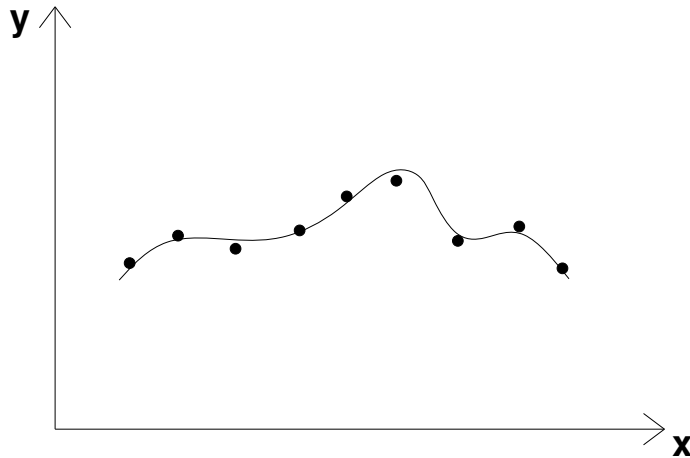
Ces points peuvent, par exemple, décrire l'évolution du cours d'une action à la Bourse (l'axe des x serait alors le temps).

Le but est de trouver un modèle pour le phénomène sous-jacent. Nous supposons ici que le modèle est un polynome de degré d (d étant connu) :

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_dx^d$$

avec des coefficients c_j , pour $j = 0, \dots, d$.

Nous devons alors estimer ces coefficients.



2.1 Question (a)

Une formulation possible du problème d'optimisation est la suivante :

$$\min_{c_0, \dots, c_d} \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2 \quad (3)$$

Il s'agit d'un problème de moindres carrés linéaires.

Explicitez les résidus de la fonction de coût et donnez un système d'équations linéaires qui permet de calculer la solution du problème.

2.2 Question (b)

La fonction de coût ci-dessus essaye de minimiser les écarts qu'il y a entre le modèle (le polynome) et les points, ceci le long de l'axe des y . Selon l'application, ceci n'est pas le meilleur

choix. Par exemple, si le polynome décrit une trajectoire, on voudrait en effet minimiser les écarts totaux (distances « orthogonales » à la trajectoire), comme montré sur la figure 1.

On saurait le faire si l'on savait calculer la distance « orthogonale » d'un point à une courbe donnée par un polynome. Malheureusement, il n'y a pas de formule explicite pour cette distance à partir d'un degré $d > 2$.

Nous proposons donc l'idée suivante : pour chaque point mesuré \mathbf{q}_i ($i = 1, \dots, n$), nous maintenons un point homologue \mathbf{q}'_i qui se situe exactement sur la courbe. Chacun de ces points peut être paramétré à l'aide d'un seul paramètre (x'_i pour le point \mathbf{q}'_i) :

$$\mathbf{q}'_i = \begin{pmatrix} x'_i \\ p(x'_i) \end{pmatrix}, \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Nous voulons optimiser, à la fois, les coefficients du polynome et les paramètres x'_i , avec le but de rapprocher au mieux chaque point \mathbf{q}'_i sur la courbe, à son homologue \mathbf{q}_i . Comme la distance entre \mathbf{q}'_i et \mathbf{q}_i peut être vue comme la distance entre la *courbe* et \mathbf{q}_i , nous pouvons alors résoudre notre problème selon les lignes évoquées au début de cette question (b).

- Ecrivez une fonction de coût pour cette formulation du problème (essayez d'obtenir une formulation de type moindres carrés).
- Explicitez les résidus, le Jacobien J , le gradient et l'approximation $J^T J$ du Hessien pour cette fonction de coût.
- Quels problèmes potentiels pour la résolution du problème pourriez-vous vous imaginer (par exemple, problèmes liés à la paramétrisation choisie) ?

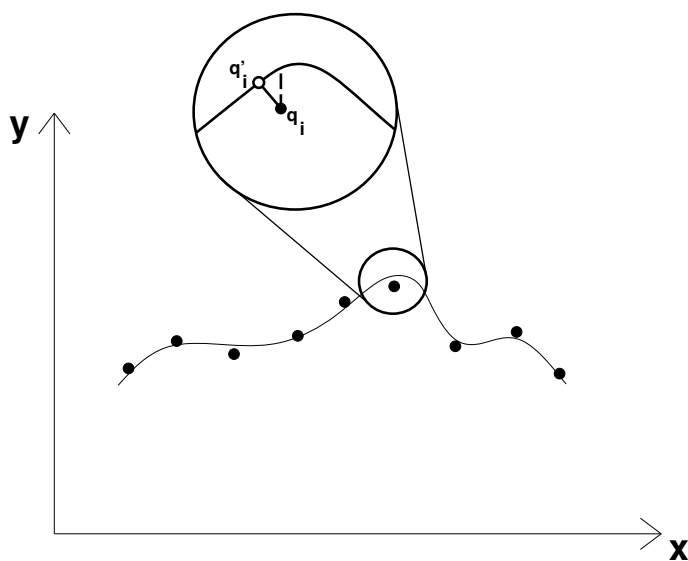


FIG. 1: Distance entre un point et son point homologue sur la courbe donnée par le polynome.

A.3 Question (c)

Il ne s'agit plus d'un problème de moindres carrés, donc la méthode utilisée ci-dessus, n'est pas applicable.

Quant au choix de la méthode, différentes argumentations sont possibles. Premièrement, il faut constater qu'il s'agit d'un problème d'optimisation non-linéaire, donc n'importe quelle méthode *générale* (e.g. *pas* une méthode de moindres carrés) peut en principe être utilisée. Le choix d'une méthode peut donc dépendre des critères évoqués tout au long du cours :

- nombre de variables ; donc, taille du Hessien par exemple \rightarrow espace mémoire et temps de calcul requis
- évitement ou non du calcul des dérivées secondes
- etc.

Un autre aspect, qui n'a pas été trop couvert dans le cours, concerne le fait que le Hessien de la fonction de coût est très *épars* dans notre cas. Explication : on peut constater que la dérivée première dans une variable y_i ne dépend que de y_i elle-même, ainsi que des deux variables « voisines », c'est-à-dire y_{i-1} et y_{i+1} . Donc, la plupart des dérivées secondes vont être nulles, et seule une bande dite « tri-diagonale » du Hessien sera occupées par des valeurs non-nulles. Par conséquent, le Hessien peut être stocké ainsi qu'inversé de manière assez efficace, ce qui permettrait par exemple d'utiliser une variante « taillée sur mesure » de la méthode de Newton. Quant à la détermination de valeurs initiales pour les y_i , nous pourrions par exemple choisir simplement $y_i = \bar{y}_i$ ou bien résoudre le problème donné dans la question (a).

B Solution Question 2 – Estimation d'un polynome

B.1 Question (a)

Les résidus sont, pour $i = 1, \dots, n$:

$$r_i = y_i - p(x_i) = y_i - c_0 - c_1 x_i - c_2 x_i^2 - \dots - c_d x_i^d$$

Le Jacobien est alors donné par la matrice $n \times (d + 1)$ suivante :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -x_1 & -x_1^2 & \dots & -x_1^d \\ -1 & -x_2 & -x_2^2 & \dots & -x_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -x_n & -x_n^2 & \dots & -x_n^d \end{pmatrix}$$

Le vecteur \mathbf{b} est donné par :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Finalement, les équations normales peuvent être écrites comme (où les sommes se font pour $i = 1, \dots, n$):

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^d \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{d+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{d+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^d & \sum x_i^{d+1} & \sum x_i^{d+2} & \cdots & \sum x_i^{2d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^d \end{pmatrix}$$

B.2 Question (b)

Fonction de coût :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [(x'_i - x_i)^2 + (p(x'_i) - y_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n [(x'_i - x_i)^2 + (c_0 + c_1 x'_i + \cdots + c_d x_i'^d - y_i)^2] \end{aligned}$$

Les variables du problème sont les coefficients du polynôme, c_0, \dots, c_d , ainsi que les x'_i .

On peut identifier $2n$ résidus :

$$\begin{aligned} r_i &= x'_i - x_i \\ r_{n+i} &= c_0 + c_1 x'_i + \cdots + c_d x_i'^d - y_i \end{aligned}$$

Le Jacobien est une matrice $(2n) \times (d + 1 + n)$ (il y a $d + 1 + n$ variables). Nous associons ses premières $d + 1$ colonnes aux variables c_0, \dots, c_d et les colonnes suivantes aux x'_i :

$$J = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & x'_1 & x_1'^2 & \cdots & x_1'^d & \sum_{j=1}^d j c_j x_1'^{j-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x'_2 & x_2'^2 & \cdots & x_2'^d & 0 & \sum_{j=1}^d j c_j x_2'^{j-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x'_n & x_n'^2 & \cdots & x_n'^d & 0 & & & \sum_{j=1}^d j c_j x_n'^{j-1} \end{array} \right)$$

Il faut noter que le Jacobien dépend des variables, donc au cours d'une méthode itérative, il doit, à chaque itération, être évalué aux valeurs actuelles des variables.

Le gradient est le vecteur de longueur $d + 1 + n$ suivant :

$$\mathbf{g} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (c_0 + c_1 x'_i + \dots + c_d x_i'^d - y_i) \\ \sum_{i=1}^n x'_i (c_0 + c_1 x'_i + \dots + c_d x_i'^d - y_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i'^2 (c_0 + c_1 x'_i + \dots + c_d x_i'^d - y_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i'^d (c_0 + c_1 x'_i + \dots + c_d x_i'^d - y_i) \\ \frac{x'_1 - x_1 + (c_0 + c_1 x'_1 + \dots + c_d x_1'^d - y_1)(c_1 + 2c_2 x'_1 \dots + d c_d x_1'^{d-1})}{x'_2 - x_2 + (c_0 + c_1 x'_2 + \dots + c_d x_2'^d - y_2)(c_1 + 2c_2 x'_2 \dots + d c_d x_2'^{d-1})} \\ \vdots \\ x'_n - x_n + (c_0 + c_1 x'_n + \dots + c_d x_n'^d - y_n)(c_1 + 2c_2 x'_n \dots + d c_d x_n'^{d-1}) \end{pmatrix}$$

Le produit $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ est donné par :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} n & \dots & \sum x_i'^d & \sum_{j=1}^d j c_j x_1'^{j-1} & \dots & \sum_{j=1}^d j c_j x_n'^{j-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i'^d & \dots & \sum x_i'^{2d} & \sum_{j=1}^d j c_j x_1'^{j+d-1} & \dots & \sum_{j=1}^d j c_j x_n'^{j+d-1} \\ \hline \sum_{j=1}^d j c_j x_1'^{j-1} & \dots & \sum_{j=1}^d j c_j x_1'^{j+d-1} & 1 + \left(\sum_{j=1}^d j c_j x_1'^{j-1} \right)^2 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ \sum_{j=1}^d j c_j x_n'^{j-1} & \dots & \sum_{j=1}^d j c_j x_n'^{j+d-1} & & & 1 + \left(\sum_{j=1}^d j c_j x_n'^{j-1} \right)^2 \end{array} \right)$$

Problèmes potentiels : mauvais conditionnement, grand nombre de variables (donc, beaucoup d'espace mémoire requis), ...