

Un problème-modèle de contrôle optimal.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de contrôle optimal. Les généralités et les problèmes d'existence sont présentés. Enfin, les aspects de résolution de tels problèmes sont détaillés.

Sont également exposées des généralités sur les problèmes de contrôle optimal régis par des équations aux dérivées partielles elliptiques dont la théorie est présentée par J.-L. Lions [Lions, 1968] et nous donnons quelques résultats fondamentaux. Ensuite, pour parler des algorithmes de résolution, en général des algorithmes de descente et donc nécessitant la connaissance du gradient de la fonctionnelle à minimiser, nous allons nous consacrer au calcul exact de ce gradient. Pour cela, nous introduisons un état adjoint par le biais d'une formulation Lagrangienne du problème de contrôle que nous étudions.

2.1 Position du problème

2.1.1 Qu'est-ce qu'un problème de contrôle ?

Dans un premier temps, nous allons donner une définition du problème auquel nous allons nous intéresser dans ce rapport : **Problème de contrôle optimal**. Une manière de le formuler est la suivante :

Etant donnée une observation y_d , peut-on trouver un contrôle admissible u tel que $y(u) = y_d$ où $y(u)$ est la solution de l'équation d'état du problème dépendant du contrôle ?

La formulation du problème de contrôle optimal repose sur une fonctionnelle J à valeurs réelles dite **fontion coût** ou **critère** qui minimise l'écart entre $y(u)$ et y_d au sens de la norme L^2 , à laquelle on ajoute un terme qui assure la régularité du contrôle et l'unicité de la solution.

Concrètement, le problème est donné par :

Trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

avec J définie par:

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |y(v) - y_d|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)$$

C'est un problème de minimisation. Dans le paragraphe suivant, on en donnera les propriétés de base, qui nous seront utiles dans toute la suite de cette étude.

2.1.2 Des notions et résultats théoriques en optimisation

Dans ce paragraphe, nous citons quelques résultats sur l'existence, l'unicité des solutions ainsi que leurs caractérisations. Nous ne démontrons pas tous ces résultats et pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [Céa, 1971] et [Faurre, 1986].

Alors, soit un problème d'optimisation dans son cadre plus général :

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v), \quad u \in K \tag{2.1}$$

où K est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V sur \mathbb{R} et J est une fonctionnelle définie sur K à valeurs dans \mathbb{R} .

Tout d'abord, il faut noter l'importance de l'hypothèse de convexité de la fonctionnelle J en optimisation. En effet, nous avons la proposition :

Proposition 2.1.1 *Si la fonctionnelle J est convexe, alors tout minimum local est un minimum global. Si de plus, J est strictement convexe, le minimum, quand il existe, est unique.*

2.1.3 Sur l'existence d'un optimum

Le théorème suivant donne un résultat général sur l'existence de minima :

Théorème 2.1.1 *Si la fonctionnelle J est convexe, semi-continue inférieurement et si $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$ ou bien le convexe fermé K est borné, alors J admet un minimum.*

Avant de donner les caractérisations des optima, nous rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1.1 La dérivée de la fonctionnelle J au point v dans la direction w est donnée par :

$$J'(v, w) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J(v + \theta w) - J(v)}{\theta} \quad (2.2)$$

Définition 2.1.2 On dira que J est Gâteaux-dérivable si $w \mapsto J'(v, w)$ de la définition.2.1.1 est linéaire continue. Dans ce cas, la Gâteaux-dérivée de J est définie par :

$$(J'(v), w) = J'(v, w) \quad (2.3)$$

Définition 2.1.3 Si on a :

$$J(v + w) = J(v) + (J'(v), w) + o(w) \text{ où } \lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{o(w)}{\|w\|} = 0, \quad (2.4)$$

on dira que J est Fréchet-dérivable et de Fréchet-dérivée $J'(v)$ au point v .

Par ailleurs, les Fréchet et Gâteaux-dérivées sont liées par :

Proposition 2.1.2 La Fréchet-dérivabilité entraîne la Gâteaux-dérivabilité. La réciproque est vraie à condition que la Gâteaux-dérivée $J'(v)$ soit continue en v .

On va donc pouvoir énoncer un théorème important en optimisation convexe :

Théorème 2.1.2 Soit $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe et Gâteaux-dérivable. Un élément u de K est un minimum de J si et seulement si :

$$\begin{cases} (J'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K & \text{cas avec contraintes : } \underline{\text{Inéquation d'Euler}} \\ \text{ou} \\ J'(u) = 0 \quad K = V & \text{cas sans contraintes : } \underline{\text{Equation d'Euler}} \end{cases}$$

2.2 Problème-modèle de contrôle optimal

2.2.1 Exemple: Contrôle distribué

Pour simplifier cette étude et pour ne pas avoir de lourdes notations, nous considérons un problème de contrôle optimal distribué régi par une équation aux dérivées partielles elliptique et donné par :

$$(\mathcal{P}) \quad J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \quad u \in \mathcal{U}_{ad} \quad (2.5)$$

où

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |y(v) - y_d|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |v|^2 dx \right),$$

- Ω est un ouvert convexe borné de \mathbb{R}^q ($q = 2$ ou 3),
- Γ , est la frontière de Ω supposée suffisamment régulière,
- \mathcal{U}_{ad} , l'espace des contrôles admissibles, est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$,
- y_d l'état désiré, est pris dans $L^2(\Omega)$,
- ν est un réel strictement positif.
- Pour $f \in L^2(\Omega)$, $y(v)$ est la solution de l'équation d'état :

$$(\mathcal{Dir}) \quad \begin{cases} -\Delta y(v) = f + v & \text{dans } \Omega, \\ y(v) = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

Proposition 2.2.1 *Le système (\mathcal{Dir}) admet une solution unique $y(v)$. De plus, l'application $u \mapsto y(u)$ est affine continue de \mathcal{U}_{ad} sur $H^1(\Omega)$.*

Proposition 2.2.2 *Le problème (\mathcal{P}) admet une solution unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$.*

Preuve : On montre facilement que la fonctionnelle J est continue et strictement convexe. De plus, \mathcal{U}_{ad} est un convexe fermé supposé non vide de $L^2(\Omega)$. D'autre part, $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$, alors, d'après le théorème 2.1.1, J admet un minimum unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

2.2.2 Interprétation Lagrangienne

On remarque que la fonctionnelle J dépend explicitement de v par l'intermédiaire du terme de régularisation et implicitement par le premier terme " $y(v)$ ". On peut donc considérer v et y comme indépendants en assimilant les équations liant v et y à des contraintes d'un type particulier. Ainsi, on peut poser $J(v) \stackrel{\text{déf}}{=} J(v, y(v)) = J(v, y)$ de telle sorte que J opère sur $\mathcal{U}_{ad} \times H^1(\Omega)$. Et le problème (\mathcal{P}) s'écrit autrement, soit

$$(\mathcal{P}bis) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } J(v, y) \\ v \in \mathcal{U}_{ad}, y \in H^1(\Omega), \\ y \text{ et } v \text{ liés par } (\mathcal{D}ir). \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous sommes donc devant un problème d'optimisation dont les variables sont v et y soumis à la contrainte donnée par $(\mathcal{D}ir)$ à laquelle nous allons associer un multiplicateur de Lagrange. On associe alors à $(\mathcal{P}bis)$ le Lagrangien \mathcal{L} défini par : $\mathcal{L} : \mathcal{U}_{ad} \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ et tel que :

$$\mathcal{L}(v, z, q) = J(v, z) - a(z, q) + (f, q) + \int_{\Omega} v q dx$$

On rappelle donc la définition d'un point-selle de \mathcal{L} :

Définition 2.2.1 (u, y, p) est un point-selle de \mathcal{L} si et seulement si :

$$\mathcal{L}(u, y, q) \leq \mathcal{L}(u, y, p) \leq \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \forall (z, q) \in (H^1(\Omega))^2.$$

La proposition suivante permet de ramener le problème (\mathcal{P}) à la recherche d'un point-selle du Lagrangien \mathcal{L} :

Proposition 2.2.3 Si (u, y, p) est un point-selle de \mathcal{L} , alors, u est la solution du problème (\mathcal{P}) .

Preuve : Soit (u, y, p) un point-selle de \mathcal{L} , il vérifie donc

$$\mathcal{L}(u, y, q) \leq \mathcal{L}(u, y, p) \leq \mathcal{L}(v, z, p) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \forall (z, q) \in (H^1(\Omega))^2. \quad (2.8)$$

Dans l'inégalité de gauche de (2.8), si nous remplaçons $\mathcal{L}(\cdot, \cdot, \cdot)$ par son expression, nous obtenons

$$J(u, y) - a(y, q) + (f, q) + \int_{\Omega} v q dx \leq J(u, y) - a(y, p) + (f, p) + \int_{\Omega} u p dx.$$

Soit,

$$a(y, q - p) - (f, q - p) + \int_{\Omega} u(q - p) dx \leq 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

En posant successivement $q = p + \tilde{q}$ et $q = p - \tilde{q}$ où \tilde{q} est quelconque dans $H^1(\Omega)$, nous obtenons

$$a(y, \tilde{q}) = (f, \tilde{q}) + \int_{\Omega} u \tilde{q} dx \leq 0 \text{ et } a(y, \tilde{q}) = (f, \tilde{q}) + \int_{\Omega} u \tilde{q} dx \geq 0.$$

Donc y est la solution de (*Dir*).

D'autre part, de l'inégalité de droite de (2.8), il vient

$$J(u, y) - a(y, p) + (f, p) + \int_{\Omega} up dx \leq J(v, z) - a(z, p) + (f, p) + \int_{\Omega} v p dx.$$

Comme y est solution de (*Dir*), il reste alors

$$J(u, y) \leq J(v, z) - a(z, p) + (f, p) + \int_{\Omega} v p dx, \quad \forall (v, z) \in \mathcal{U}_{ad} \times H^1(\Omega). \quad (2.9)$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} J(u, y) &\leq J(v, z) \\ \forall (v, z) \in \mathcal{U}_{ad} \times H^1(\Omega) \text{ tel que } a(z, p) &= (f, p) + \int_{\Omega} v p dx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

ou encore

$$\begin{aligned} J(u, y) &\leq J(v, z) \\ \forall (v, z) \in \mathcal{U}_{ad} \times H^1(\Omega) \text{ tel que } v \text{ et } z \text{ liés par } &(\textit{Dir}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.3 Caractérisation d'un point-selle de \mathcal{L}

Comme \mathcal{L} est différentiable et convexe par rapport à chacune de ses variables v et z , (2.8) est équivalente à

$$(i) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(v, z, q)|_{(u, y, p)}, \varphi \right) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (2.12)$$

$$(ii) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(v, z, q)|_{(u, y, p)}, \varphi \right) = 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (2.13)$$

$$(iii) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, z, q)|_{(u, y, p)}, v - u \right) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (2.14)$$

Ce qui donne les systèmes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (i) \text{ Etat direct} \\
 (ii) \text{ Etat adjoint} \\
 (iii) \text{ Condition d'optimalité}
 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{cases} -\Delta y(u) = f + u & \text{dans } \Omega, \\ y(u) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \\
 \begin{cases} -\Delta p(u) = y(u) - y_d & \text{dans } \Omega, \\ p(u) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \\
 \int_{\Omega} (p(u) + \nu u)(v - u) dx \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\
 \text{ou } p + \nu u = 0 \text{ cas sans contraintes}
 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Les équations (2.15) forment le “**système d’optimalité**” du problème de contrôle optimal (\mathcal{P}).

Proposition 2.2.4 *Pour que (u, y, p) soit un point-selle de \mathcal{L} sur $\mathcal{U}_{ad} \times V \times V$, il faut et il suffit qu’il soit solution du système (2.15).*

Preuve : La condition nécessaire est donnée par la caractérisation ci-dessus. la réciproque repose sur la convexité du Lagrangien \mathcal{L} en v et z .

Remarque 2.2.1 *L’inéquation (resp. l’équation) (iii) du système (2.15) n’est autre que l’inéquation (resp. l’équation) d’Euler relative au problème d’optimisation (\mathcal{P}).*

Ce qui nous amène à énoncer le lemme suivant qui donne le calcul direct du gradient de la fonction coût J en u :

Lemme 2.2.1 *Le gradient de la fonction coût J en u est donné par*

$$J'(u) = p + \nu u. \quad (2.16)$$

Soit u et v dans $L^2(\Omega)$, comme $y(u)$ est une fonction affine continue de u , on a

$$(J'(u), v - u) = \int_{\Omega} (y(u) - y_d)(y(v) - y(u)) dx + \nu \int_{\Omega} u(v - u) dx. \quad (2.17)$$

Nous allons réécrire le premier terme de cette égalité. Pour cela, nous utilisons les formulations variationnelles des états direct et adjoint du système d’optimalité (2.15), c’est à dire,

$$a(y(u), \varphi) = (f + u, \varphi), \quad \forall \varphi \in V, \quad (2.18)$$

$$a(p, \phi) = (y(u) - y_d, \phi), \quad \forall \phi \in V. \quad (2.19)$$

On pose $\varphi = p$ dans (2.18) pour $y(u)$ et $y(v)$ et on fait la différence, il résulte

$$a(y(v) - y(u), p) = (v - u, p). \quad (2.20)$$

Ensuite, on prend $\phi = y(v) - y(u)$ dans (2.19), il vient

$$a(y(v) - y(u), p) = (y(u) - y_d, y(v) - y(u)). \quad (2.21)$$

Donc,

$$(J'(u), v - u) = (p + \nu u, v - u) \quad (2.22)$$

Remarque 2.2.2

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}(v, z, q)|_{(u, y, p)} = J'(u) = p + \nu u \quad (2.23)$$

Remarque 2.2.3 Dans le cas sans contraintes, c'est à dire, $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega)$, le contrôle optimal est donné par :

$$u = -\frac{p}{\nu}$$

On obtient alors un système couplé en y et p .

2.3 Résolution numérique et calcul du gradient

Nous avons vu que l'approche Lagrangienne permet de ramener le problème de contrôle optimal à une recherche de point-selle. Cette approche permet également de calculer l'expression du gradient de la fonctionnelle J à partir de l'état adjoint (ou le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte donnée par l'équation d'état). Nous développons ainsi numériquement un algorithme rapide de calcul de gradient de la fonctionnelle coût J à minimiser. Indépendamment de la nature de l'algorithme d'optimisation choisi, nous résumons les étapes de calcul de la fonction coût en un point (ou un contrôle) $u^n : J(u^n)$ ainsi que son gradient $\nabla J(u^n)$ dans le diagramme de la figure 2.1.

2.3.1 Algorithmes de minimisation

Pour résoudre les problèmes de contrôle optimal, on a besoin d'algorithmes efficaces de minimisation. Ces algorithmes reposent très souvent sur les méthodes de descente. La fonctionnelle à minimiser dans les problèmes de contrôle que nous allons considérer, étant quadratique, un premier algorithme très efficace est l'algorithme de Gradient Conjugué.

Algorithme de gradient conjugué

Si on considère le cas simple de fonction quadratique J définie par :

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \quad (2.24)$$

où A est une matrice $M \times M$ définie positive et $b \in \mathbb{R}^M$, le problème de minimisation étant donné par :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^M} J(x) = J(x^*), \quad x^* \in \mathbb{R}^M. \quad (2.25)$$

L'algorithme de gradient conjugué s'écrit :

Etape 0 : Initialisation

$$\begin{aligned} x^0 &\in \mathbb{R}^M \text{ donné arbitrairement,} \\ g^0 &= Ax^0 - b \\ d^0 &= g^0 \end{aligned}$$

Puis , pour $n \geq 0$, x^n , g^n et d^n connus, on calcule x^{n+1} , g^{n+1} et d^{n+1} par :

Etape 1 : Descente

$$\begin{cases} \text{Trouver } \rho_n \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ J(x^n - \rho_n d^n) \leq J(x^n - \rho d^n), \quad \forall \rho \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - \rho_n d^n \\ g^{n+1} &= Ax^{n+1} - b \end{aligned}$$

Etape 2 : Nouvelle direction de descente

$$d^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n d^n \quad (2.27)$$

$$\text{où } \gamma_n = \frac{(g^n, d^n)}{(Ad^n, d^n)} \quad (2.28)$$

Faire $n = n + 1$ et aller à (2.26)

Remarque 2.3.1 *La méthode de Gradient Conjugué converge en un nombre fini d'itérations (au plus M itérations dans le cas de (2.24)).*

■

Nous présentons maintenant une autre classe de méthodes de minimisation :

Méthode de quasi-Newton

Le principe des méthodes de quasi-Newton est d'utiliser les variations du gradient de la fonctionnelle à minimiser entre deux itérés successifs; on obtient donc de l'information

sur le Hessien de cette fonctionnelle.

En général, une méthode de quasi-Newton est basée sur l'itération du processus :

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k - \rho_k H_k^{-1} g_k \\ H_{k+1}^{-1} = \mathcal{A}(H_k^{-1}, y_k, s_k) \end{cases} \quad (2.29)$$

où $y_k = g_{k+1} - g_k$, $g_k = \nabla J(x_k)$ est la différence des gradients entre deux itérés successifs, $s_k = x_{k+1} - x_k$ est le pas en x , ρ_k est un pas calculé par minimisation de J dans la direction $d_k = -H_k^{-1} g_k$ et \mathcal{A} est un algorithme de mise à jour de H_k^{-1} en fonction de y_k et s_k , où H_k est le Hessien de la fonctionnelle J au point x_k : $H_k = \nabla^2 J(x_k)$.

La formule BFGS est l'une des méthodes de mise à jour qui donne de bons résultats :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k \otimes y_k}{\langle y_k, s_k \rangle} - \frac{(H_k s_k) \otimes (H_k s_k)}{\langle H_k s_k, s_k \rangle}$$

en ayant utilisé la notation :

$$u \otimes v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } w \mapsto (u \otimes v)w = \langle v, w \rangle u$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire ordinaire. Ces formules ont la propriété de conserver la définie-positivité de H_k si et seulement si $\langle y_k, s_k \rangle$ est positif.

Pour nos tests numériques, nous allons utiliser une implémentation de cette méthode réalisée dans le cadre du projet MODULOPT de l'INRIA par J.-C. Gilbert et C. Lemaréchal [Gilbert et Lemaréchal, 1989].

Conclusion

Après avoir posé et étudié cet exemple de problème de contrôle, on va voir dans le chapitre qui suit comment on va le reformuler une fois ayant décomposé le domaine Ω .

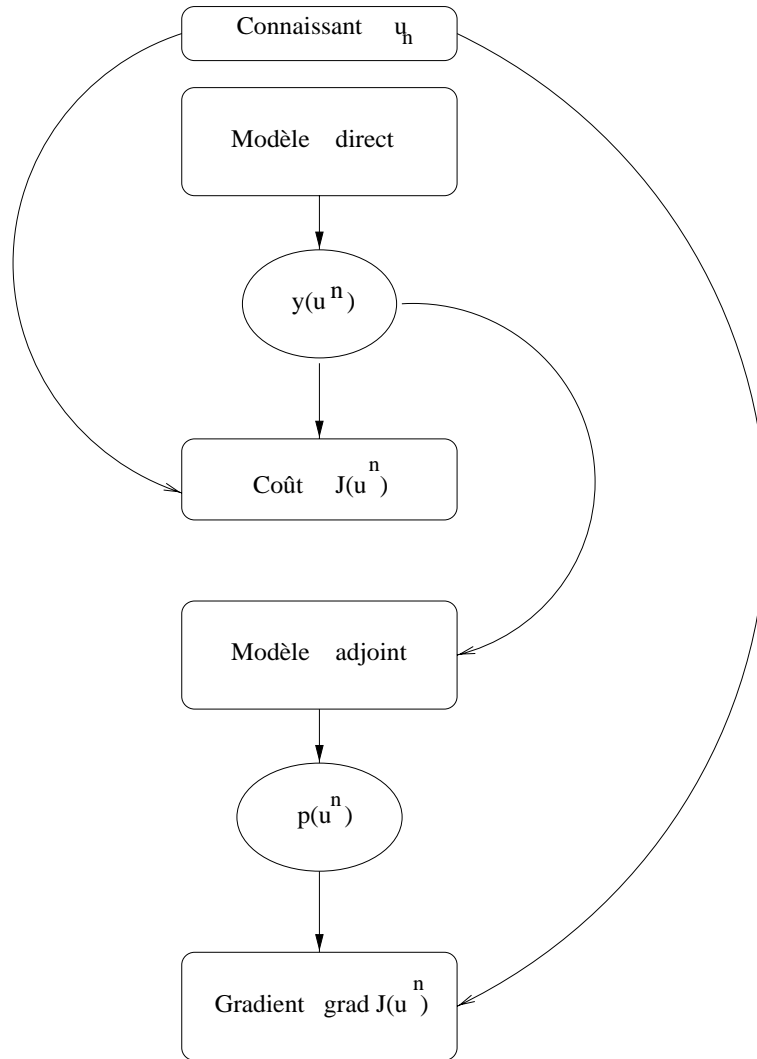


FIG. 2.1 – Schéma de calcul du gradient de la fonction coût J .