

## Sommaire

<p><b>1 Etude locale d'une courbe paramétrée</b> . . . . . 2</p> <p>1-1 Tangente et demi-tangente en un point . . . . . 2</p> <p>1-2 Etude locale d'une courbe plane . . . . . 3</p> <p>1-3 Branches infinies . . . . . 5</p> <p><b>2 Courbes planes définies de façon implicite</b> . . . . . 6</p> <p>2-1 Lignes de niveau . . . . . 6</p> <p>2-2 Tangente en un point non singulier . . . . . 6</p> <p>2-3 Paramétrer une ligne de niveau . . . . . 6</p> <p><b>3 Courbes planes en polaires</b> . . . . . 6</p> <p>3-1 Courbes en coordonnées polaires . . . . . 6</p> <p>3-2 Ensemble d'étude . . . . . 7</p> <p>3-3 Tangente . . . . . 7</p> <p>3-4 Branches infinies . . . . . 8</p> <p>3-5 Plan d'étude . . . . . 9</p> <p>3-6 Exemple . . . . . 10</p>	<p>3-7 Courbes usuelles en polaires . . . . . 11</p> <p><b>4 Etude métrique</b> . . . . . 11</p> <p>4-1 Longueur d'un arc, abscisse curviligne . . . . . 11</p> <p>4-2 Repère de Frenet . . . . . 12</p> <p>4-3 Courbure . . . . . 13</p> <p>4-4 Calcul élémentaire de la courbure . . . . . 13</p> <p>4-5 Calcul pratique de la courbure . . . . . 14</p> <p>4-6 Calcul direct des éléments de courbure . . . . . 15</p> <p>4-7 Valeur 0 du paramètre . . . . . 17</p> <p><b>5 Trajectoires orthogonales</b> . . . . . 17</p> <p>5-1 Trajectoire orthogonale . . . . . 17</p> <p>5-2 Recherche des trajectoires orthogonales . . . . . 17</p> <p><b>6 Compléments</b> . . . . . 19</p> <p>6-1 Avec Maple . . . . . 19</p> <p>6-2 Les mathématiciens du chapitre . . . . . 19</p>
---	---

## Figures

<p>1 La tangente est la limite des sécantes . . . . . 2</p> <p>2 Etude locale d'une courbe paramétrée . . . . . 4</p> <p>3 Exemple de <math>\rho</math> négatif en polaires . . . . . 7</p> <p>4 Tangente en polaires . . . . . 8</p>	<p>5 Asymptote en polaires . . . . . 9</p> <p>6 Exemple de courbe en polaires . . . . . 10</p> <p>7 Repère de Frenet . . . . . 12</p> <p>8 Cercle, rayon et centre de courbure . . . . . 14</p> <p>9 Trajectoire orthogonale . . . . . 18</p>
---	---

Il existe plusieurs moyens de décrire une courbe pour l'étudier :

- Pour des courbes planes :
  - $y = f(x)$ , en cartésiennes,
  - $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{pmatrix}$ , en paramétriques,
  - $F(x,y) = 0$ , en ligne de niveau,
  - et  $\rho = \rho(\theta)$  en polaires.
- Pour les courbes de l'espace :
  - $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix}$ , en paramétriques,
  - $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$  par intersection de surfaces.

Concernant les courbes de l'espace, les seules notions abordées dans ce chapitre sont la tangente à une courbe paramétrée et la longueur d'un arc (abscisse curviligne).

Dans le chapitre sur les surfaces, on verra aussi comment déterminer, si elle existe, la tangente à une courbe de l'espace définie par intersection de surfaces.

Pour le reste, toutes les courbes étudiées sont planes. Ce chapitre complète ce que vous avez déjà pu apprendre sur le sujet.

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan ou l'espace euclidien habituel muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ou  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  selon les cas.

En l'absence de mention contraire, les coordonnées d'un point sont prises dans ce repère.

# 1 Etude locale d'une courbe paramétrée

## 1-1 Tangente et demi-tangente en un point

La courbe  $C$  est l'ensemble des points  $M$  ou  $M(t)$  tels que  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t)$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

selon les cas,  $t \in I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Sur cet intervalle, on suppose au minimum que  $\overrightarrow{F}$  est continue.

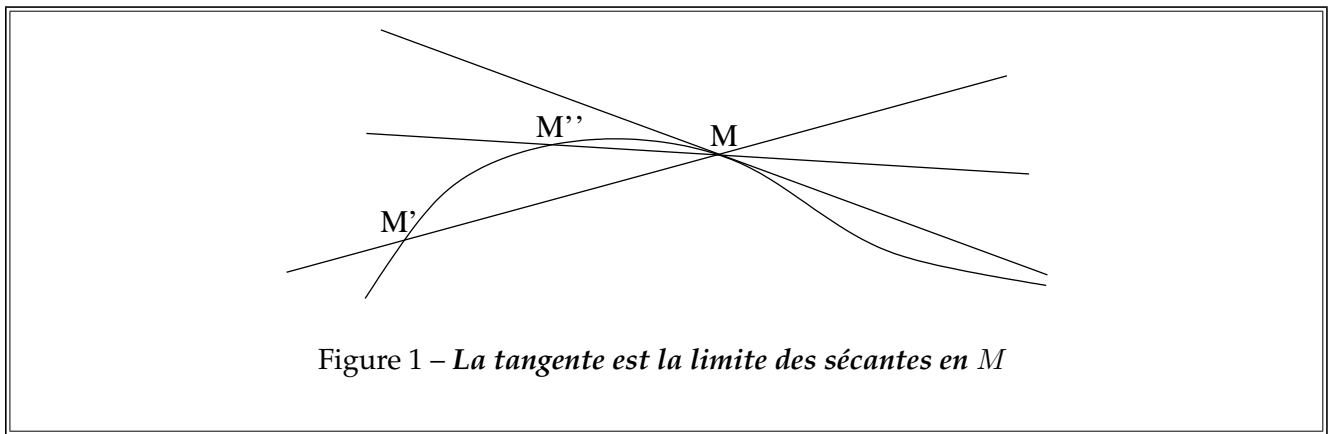
**Définition :**  $M_0(t_0) \in C$ , on dit que  $C$  **admet une tangente** en  $M_0$

$\Leftrightarrow$  la droite  $(M_0M)$ , avec  $M = M(t)$ , a une limite quand  $M \rightarrow M_0$ , c'est à dire quand  $t \rightarrow t_0$ .

Cette droite est alors la **tangente** à  $C$  en  $M_0$ .

On parlera éventuellement de demi-tangente si on a une limite à droite ou une limite à gauche.

Voir la figure 1, ci-dessous.



Comme il y a, selon son orientation, deux vecteurs unitaires qui dirigent une droite, cela revient à ce que le vecteur unitaire  $\pm \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$  admet une limite quand  $M \rightarrow M_0$ .

La tangente est alors la droite passant par  $M_0$  et dirigée par ce vecteur.

**Définition :** Un point  $M_0(t_0) \in C$  est **régulier**  $\Leftrightarrow \overrightarrow{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ .

**Définition :** Un point non régulier est un point stationnaire.

**Théorème :** En un point  $M_0(t_0)$  régulier, la courbe  $C$  admet une tangente dirigée par  $\overrightarrow{F}'(t_0)$ .

**Démonstration :** On fait la démonstration pour une courbe plane, c'est exactement la même pour une courbe paramétrée de l'espace.  $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$  a pour coordonnées :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \frac{t - t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{t - t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} &= \frac{t - t_0}{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t - t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat. ■

**Théorème :**  $M_0(t_0)$  un point stationnaire de  $C$ , si  $\overrightarrow{F}$  est de classe suffisante au voisinage de  $t_0$ , pour qu'il existe un vecteur dérivé non nul  $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ .

Alors,  $C$  admet en  $M_0$  une tangente ou des demi-tangentes. Elles sont portées par ce premier vecteur dérivé non nul  $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ . On note habituellement  $p$  l'ordre de dérivation de ce vecteur.

**Démonstration :** On travaille ici exactement de la même façon dans le plan ou dans l'espace. On fait un développement limité de  $\overrightarrow{F}$  à l'ordre  $p$ , en tenant compte du fait que les dérivées aux ordres inférieurs à  $p$  sont nulles :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)} = \frac{(t - t_0)^p}{p!} \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + (t - t_0)^p \varepsilon(t - t_0)$$

Ce qui permet d'avoir le résultat annoncé en calculant la limite de  $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$ . ■

### 1-2 Etude locale d'une courbe plane paramétrée

On appelle encore  $p$  le rang de dérivation du premier vecteur dérivé non nul,  $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq \vec{0}$ , et  $q$  le rang du premier vecteur dérivé non colinéaire à  $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ , sous réserve bien sûr que  $\overrightarrow{F}$  soit de classe suffisante.  $\left(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$  est ainsi une famille libre.

**Définition :** On dit que  $M_0$  est **birégulier**  $\Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

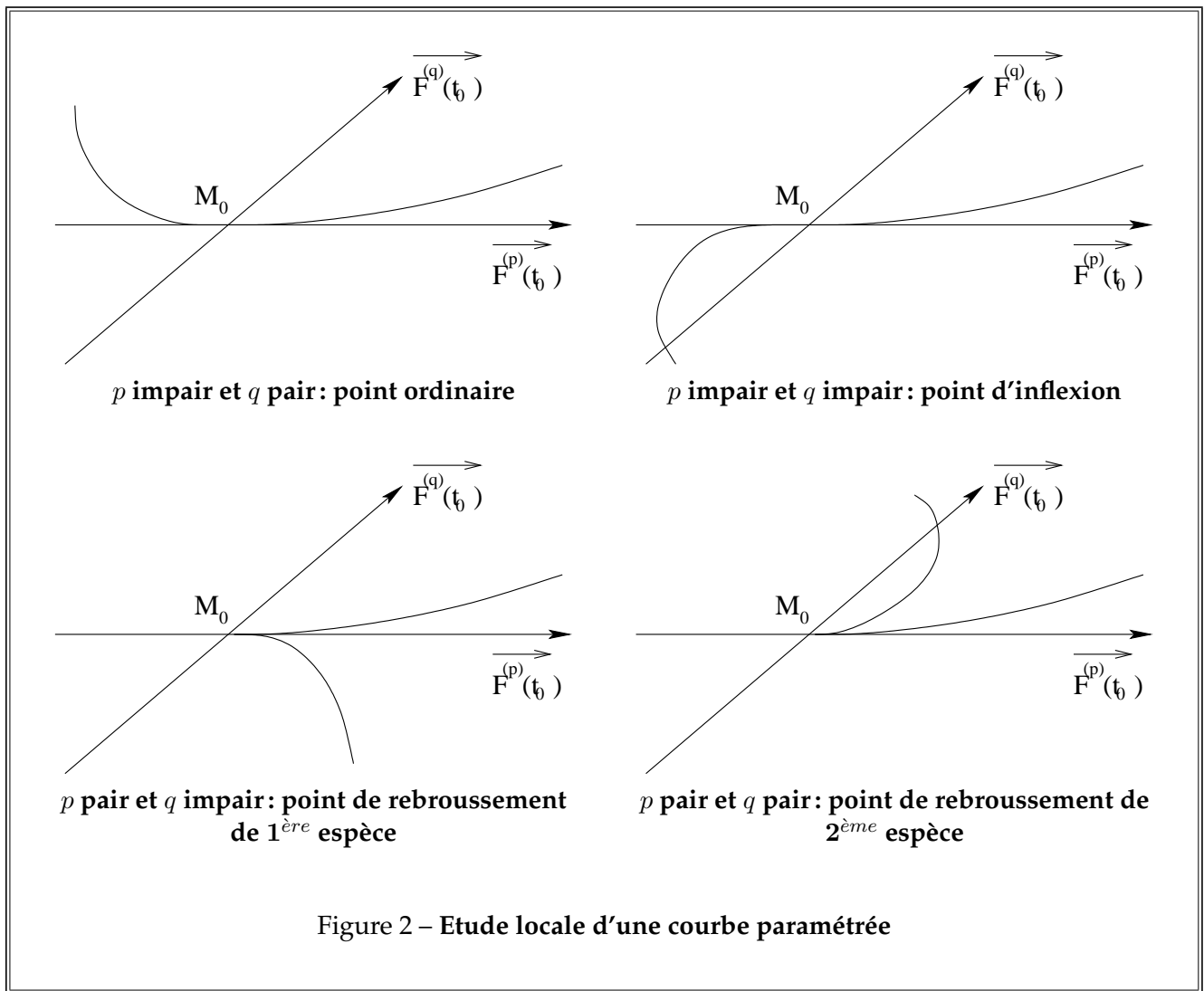
Dans tous les cas, on obtient l'allure locale de la courbe en faisant un développement limité à l'ordre  $q$  de  $\overrightarrow{F}$ .

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)} = \frac{(t - t_0)^p}{p!} (1 + o(t - t_0)) \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0) + (t - t_0)^q \varepsilon(t - t_0)$$

Dans la base  $\left(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{M_0M}$  sont équivalentes à  $\frac{(t - t_0)^p}{p!}$  et  $\frac{(t - t_0)^q}{q!}$  quand  $t \rightarrow t_0$ .

On travaille donc dans le repère  $\left(M_0, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$ , tout se décide alors suivant la parité de  $p$  et  $q$ .

La courbe est toujours tangente à  $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ , la parité de  $p$  donne le signe de la coordonnée lorsque  $t < t_0$ , la parité de  $q$  donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée. Dans les figures suivantes, le repère tracé est :  $\left(M_0, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$ .



On peut voir sur la figure 2, ci-dessous, l'ensemble des cas.

En un point birégulier, la concavité est tournée vers  $\overrightarrow{F''(t_0)}$ .

$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$  quand elle existe, est toujours la pente de la tangente à la courbe au point considéré.

Quand la pente de la tangente, donnée par  $\overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}$  ou par  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$  est nulle ou infinie, c'est à dire quand la tangente horizontale ou verticale, la recherche de  $q$  est inutile puisque les variations de  $x(t)$  et  $y(t)$  permettent alors de déterminer le type de point.

Un point d'inflexion géométrique vérifie toujours  $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0$ . A la demande de l'énoncé, on recherchera les point d'inflexion parmi ceux qui ont cette propriété.

**Exemple :** On va faire l'étude locale de l'arc paramétré :  $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$  en  $t = -1$ .

On a :  $\begin{cases} x'(t) = 2 + 2t \\ y'(t) = 2 + \frac{2}{t^3} \end{cases}$  ce qui donne :  $\begin{cases} x(-1) = -1 \\ y(-1) = -3 \end{cases}$  et :  $\begin{cases} x'(-1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases}$ ,

- $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  est donc un point stationnaire.

De plus :  $\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = -\frac{6}{t^4} \end{cases}$  ce qui donne :  $\begin{cases} x''(-1) = 2 \\ y''(-1) = -6 \end{cases}$ .

- La tangente est dirigée selon :  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $p = 2$ .

Enfin, :  $\begin{cases} x'''(t) = 0 \\ y'''(t) = \frac{24}{t^5} \end{cases}$  ce qui donne :  $\begin{cases} x'''(-1) = 0 \\ y'''(-1) = -24 \end{cases}$ .

- Ce qui donne  $q = 3$  et on a un point de rebroussement de première espèce.

### 1-3 Branches infinies d'une courbe plane paramétrée

On dit que  $C$  admet une branche infinie quand  $x(t)$  ou  $y(t)$  tendent vers  $\pm\infty$  en  $t_0$  ou  $\pm\infty$ . Une hyperbole a ainsi 4 branches infinies.

- 1)  $y(t) \rightarrow \pm\infty$  et  $x(t) \rightarrow l$  quand  $t \rightarrow t_0$  : on a une asymptote verticale d'équation  $x = l$
- 2)  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  et  $y(t) \rightarrow l$  quand  $t \rightarrow t_0$  : on a une asymptote horizontale d'équation  $y = l$
- 3)  $x(t)$  et  $y(t) \rightarrow \pm\infty$  quand  $t \rightarrow t_0$  on calcule  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$  appelée  $a$  si elle existe,

- a) si il n'y a pas de limite, on ne dit rien de plus.
- b)  $a = \pm\infty$  on a une branche parabolique de direction  $Oy$ .
- c)  $a = 0$  on a une branche parabolique de direction  $Ox$ .
- d) dans les autres cas, on calcule  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t)$  appelée  $b$ ,

- si il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique  $y = ax$ .
- $b = \pm\infty$  on a une branche parabolique de direction  $y = ax$ .
- dans les autres cas, on a une asymptote  $y = ax + b$ , de plus :
  - si  $y(t) - ax(t) - b > 0$ , la courbe est au dessus de l'asymptote,
  - si  $y(t) - ax(t) - b < 0$ , la courbe est au dessous de l'asymptote.

**Exemple :** On va faire l'étude locale de l'arc paramétré :  $\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$  en  $t = 0^+$ .

$x(t)$  et  $y(t)$  tendent tous deux vers  $+\infty$  en  $0^+$ , on a une branche infinie.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t + \frac{1}{t}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \frac{t^2 + 1}{t^3 + 2} \xrightarrow[0^+]{1} \frac{1}{2}, \text{ et donc } y = \frac{1}{2}x \text{ est direction asymptotique.}$$

$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 \xrightarrow[0^+]{1} 0^+, \text{ et donc la droite } y = \frac{1}{2}x \text{ est asymptote à la courbe en } t = 0^+.$$

La courbe est donc au dessus de son asymptote.

**Exemple :** On va faire l'étude locale de l'arc paramétré :  $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

$x(t)$  et  $y(t)$  tendent tous deux vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , on a une branche infinie.

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t - \frac{1}{t^2}}{2t + t^2} = \frac{2t^3 - 1}{2t^3 + t^4} \rightarrow 0$ . Quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a une branche parabolique de direction  $Ox$ .

## 2 Courbes planes définies de façon implicite, Lignes de niveau

### 2-1 Lignes de niveau

**Définition :**  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . La courbe  $C$  d'équation  $F(x,y) = \lambda$  est l'ensemble des points de  $\mathcal{U}$  dont les coordonnées vérifient cette équation. C'est la ligne de niveau de  $F$  de hauteur  $\lambda$ .

**Définition :** Soit  $M_0(x_0, y_0)$ , un point de  $C$  d'équation  $F(x,y) = \lambda$ .

$$M_0 \text{ est singulier} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} = \vec{0}$$

### 2-2 Tangente en un point non singulier

**Théorème :** Soit  $M_0(x_0, y_0)$ , un point de  $C$  d'équation  $F(x,y) = \lambda$ ,  $M_0$  non singulier.

Alors  $C$  admet une tangente en  $M_0$ , normale à  $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)}$ . Elle est donc d'équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

En un point singulier, il est possible que  $C$  ait une tangente comme il est possible qu'elle n'en ait pas.

**Démonstration :** On admet que  $C$  puisse être paramétrée par  $t$  de telle façon que  $M_0$  soit un point régulier correspondant à  $t_0$ .

Alors  $\forall t \in I$ ,  $f(t) = F(x(t), y(t)) = \lambda$ , et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On dérive,  $f'(t_0) = 0$  entraîne

$$x'(t_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Ce qui prouve que le gradient est normal à la tangente. ■

**Exemple :** On va chercher l'équation de la tangente au point  $(1,1)$  à l'ellipse d'équation  $4x^2 + y^2 = 5$ .

En  $(1,1)$ , le gradient est  $(8,2)$ , un vecteur normal à la courbe est donc  $(4,1)$ .

La tangente a donc une équation de la forme  $4x + y = k$ , et comme elle passe par  $(1,1)$ , la tangente est d'équation :  $4x + y = 5$ .

### 2-3 Paramétrer une ligne de niveau

Comme il est plus facile de tracer une courbe paramétrée qu'une ligne de niveau, on cherche souvent à paramétrer celles ci.

Les deux moyens habituels sont :

- 1) Poser :  $y = tx$ , résoudre :  $f(x, tx) = 0$  en  $x$ , et on a alors la courbe paramétrée par  $t$ .
- 2) Passer en polaire et résoudre :  $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 0$  en  $\rho$ . On a alors la courbe de façon usuelle en polaires.

## 3 Courbes planes en polaires

### 3-1 Courbes en coordonnées polaires

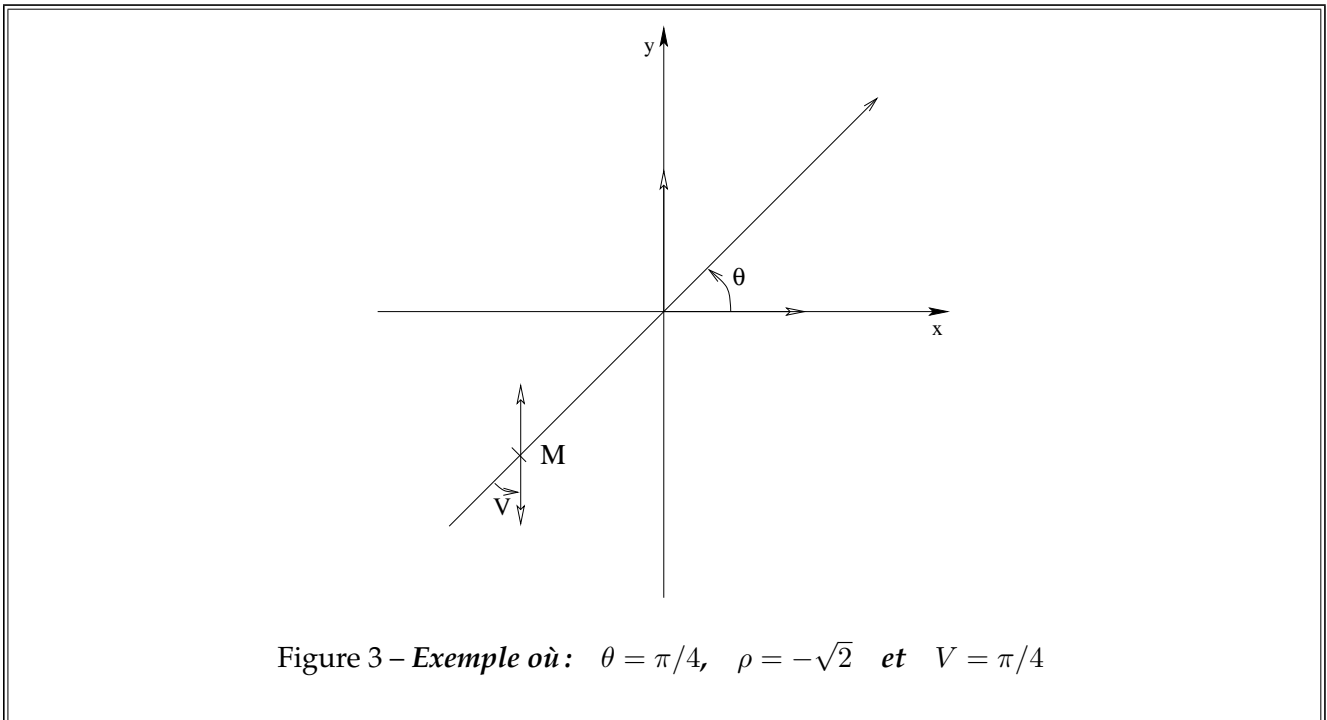
**Définition :**  $C$  la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = f(\theta) = \rho(\theta)$ ,  $\theta \in I$ ,

est l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées vérifient  $\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}$  avec  $\theta \in I$ .

On prendra toujours l'application  $\rho$  au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

Contrairement à ce qui se passe quand on prend des coordonnées polaires dans les intégrales doubles, cylindriques ou sphériques dans les intégrales triples, **on admet ici que  $\rho$  puisse être négatif.**

La figure 3, ci-dessous, montre un exemple de  $\rho$  négatif.



### 3-2 Ensemble d'étude

En général,  $\rho$  est  $T$ -périodique. On cherche l'ensemble de définition, la périodicité, un premier ensemble d'étude : celui-ci doit être un multiple de la période et de  $2\pi$ .

On recherche d'éventuelles symétries pour réduire l'ensemble d'étude.

On regarde en fait comment change  $\rho$  quand on change  $\theta$ , ce qui est résumé dans le tableau suivant :

$\theta$	$\rho$	$C$ admet
$\theta$ en $-\theta$	$\rho$ en $\rho$	une symétrie / $0x$
$\theta$ en $-\theta$	$\rho$ en $-\rho$	une symétrie / $0y$
$\theta$ en $\pi - \theta$	$\rho$ en $\rho$	une symétrie / $0y$
$\theta$ en $\pi - \theta$	$\rho$ en $-\rho$	une symétrie / $0x$
$\theta$ en $\pi + \theta$	$\rho$ en $\rho$	une symétrie / $0$
$\theta$ en $\pi + \theta$	$\rho$ en $-\rho$	uniquement des points doubles

Dans chaque cas, on peut réduire l'intervalle d'étude.

### 3-3 Tangente

**Théorème :**  $C$  la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = \rho(\theta)$  avec  $\rho$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $\theta_0$ . Alors  $C$  admet une tangente en  $M_0(\theta_0)$  définie par

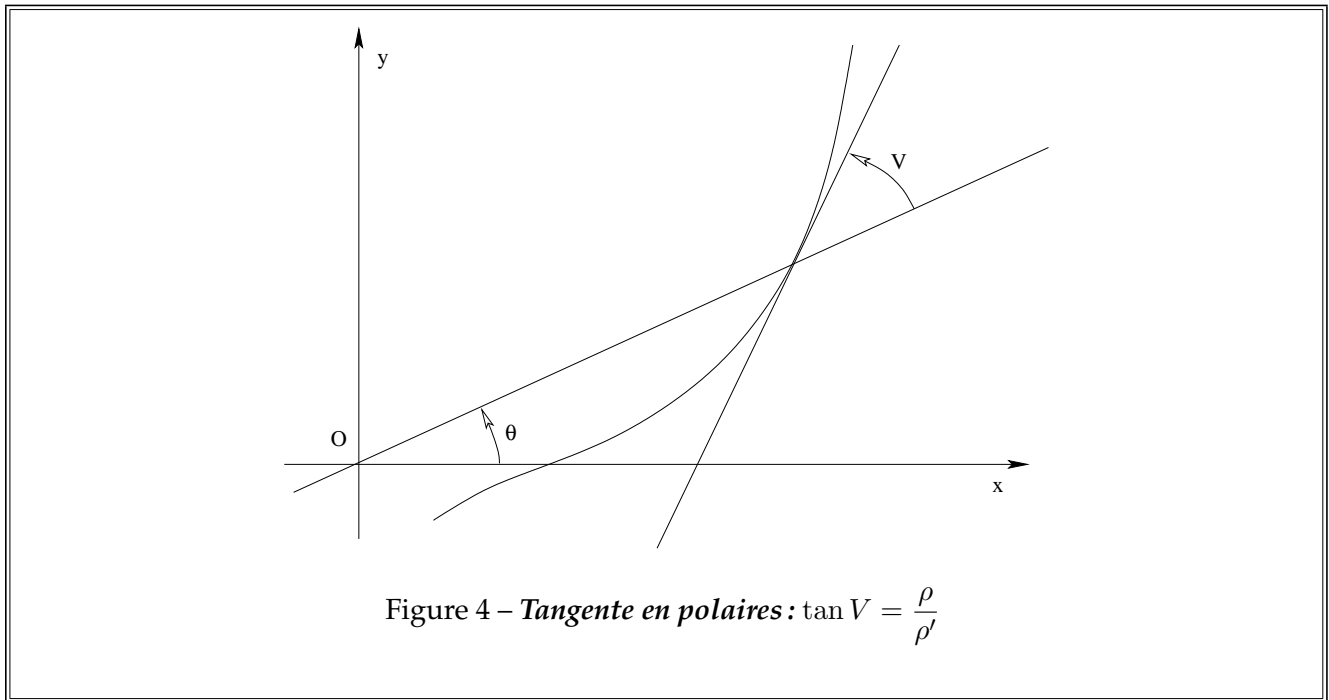
$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$$

avec  $V$  l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente. En un point où  $\rho(\theta_0) = 0$ , la tangente à la courbe est la droite  $\theta = \theta_0$ .

**Corollaire :** Si de plus,  $\rho(\theta_0) = 0$ , alors  $V = 0$

**Conclusion :** Dans tous les cas, l'équation de la tangente dans le repère local  $(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est :  $Y = \tan V X$

Ceci est illustré par la figure 3, déjà vue, et la figure 4, ci-dessous.



**Démonstration :** On utilise ici les notations des physiciens  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ .

$$\vec{OM} = \rho(\theta) \vec{u}_r$$

et donc comme la dérivée de  $\vec{u}_r$  par rapport à  $\theta$  est  $\vec{u}_\theta$

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho'(\theta) \vec{u}_r + \rho(\theta) \vec{u}_\theta$$

En écrivant cette égalité en  $\theta_0$ , on obtient que  $\tan V = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}$ , avec  $V$  l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente.

Si  $\rho(\theta_0) = 0$ , la pente de  $\vec{M_0M} = \vec{OM}$  est  $\frac{y}{x} = \frac{\rho(\theta) \sin \theta}{\rho(\theta) \cos \theta}$  qui tend bien vers  $\tan \theta_0$  ■

### 3-4 Branches infinies

On a une branche infinie quand  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta)$  est infini.

On remarque que  $\begin{cases} \rho(\theta) \cos(\theta - \theta_0) = X \\ \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = Y \end{cases}$  dans le repère tourné de  $\theta_0$ .

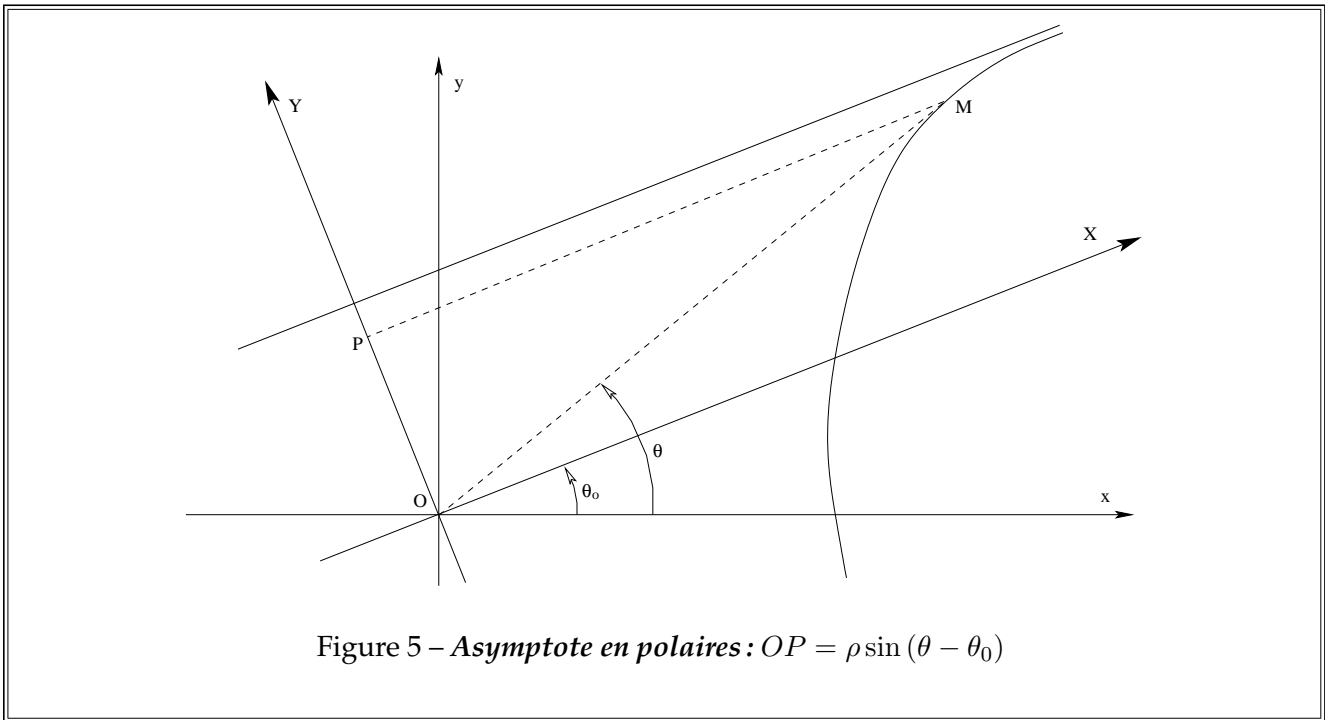
Dans tous les cas, quand  $\theta \rightarrow \theta_0$   $\begin{cases} X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow 0 \\ X \rightarrow 0 \end{cases}$  La direction asymptotiques est donc toujours  $OX$ .

Pour l'étude des branches infinies, on cherche donc :  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$ .

- s'il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique  $OX$ .
- cette limite est infinie, on a une branche parabolique de direction  $OX$ .

- cette limite est finie  $Y_0$ , on a une asymptote d'équation  $Y = Y_0$ . Comme  $X \sim \rho$ , on sait de quel coté de l'asymptote on est, puisqu'on a pris soin de tracer le repère local.

Ceci est illustré par la figure 5, ci-dessous, avec :  $Y = \overline{OP}$



**Exemple :** On va étudier la branche infinie de la courbe d'équation  $\rho = \frac{2 \cos \theta + 1}{2 \sin \theta - 1}$  en  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

$$Y = \rho \sin \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 \cos \theta + 1}{2 \left( \sin \theta - \sin \frac{\pi}{6} \right)} \sin \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 (2 \cos \theta + 1) \sin \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12} \right)}{4 \sin \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12} \right)}$$

$$Y = \frac{(2 \cos \theta + 1) \cos \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12} \right)}{2 \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12} \right)} \xrightarrow{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a donc une asymptote d'équation  $Y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$  dans le repère  $XOY$  tourné de  $\frac{\pi}{6}$  par rapport à  $xOy$ .

### 3-5 Plan d'étude

On a ici 2 originalités :

- On ne fait l'étude des variations de  $\rho$  par le signe de  $\rho'$  que **si cette étude est simple!** On peut très bien s'en passer pour tracer la courbe ! Cependant, le calcul de  $\rho'$  reste nécessaire pour déterminer la tangente en des points particuliers.
- Par contre, on fait l'étude **indispensable** du signe de  $\rho$ , qui figure dans le tableau de « variations » et permet de déterminer dans quel cadran on trace la courbe.

On a donc :

- 1) Ensemble de définition, période, symétries, ensemble d'étude.
- 2) Tableau de « variations »,  $\theta$ ,  $\rho(\theta)$ , signe de  $\rho$ , éventuellement  $\rho'$ ,  $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$ .
- 3) Branches infinies.
- 4) Points essentiels et leurs tangentes.
- 5) Tracé de la courbe.

### 3-6 Exemple

On va étudier la courbe d'équation  $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$  en coordonnées polaires.

$\rho(\theta)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique et paire. On va donc étudier la fonction sur  $[0, \pi]$  et il faudra compléter la courbe par une symétrie par rapport à  $Ox$ .

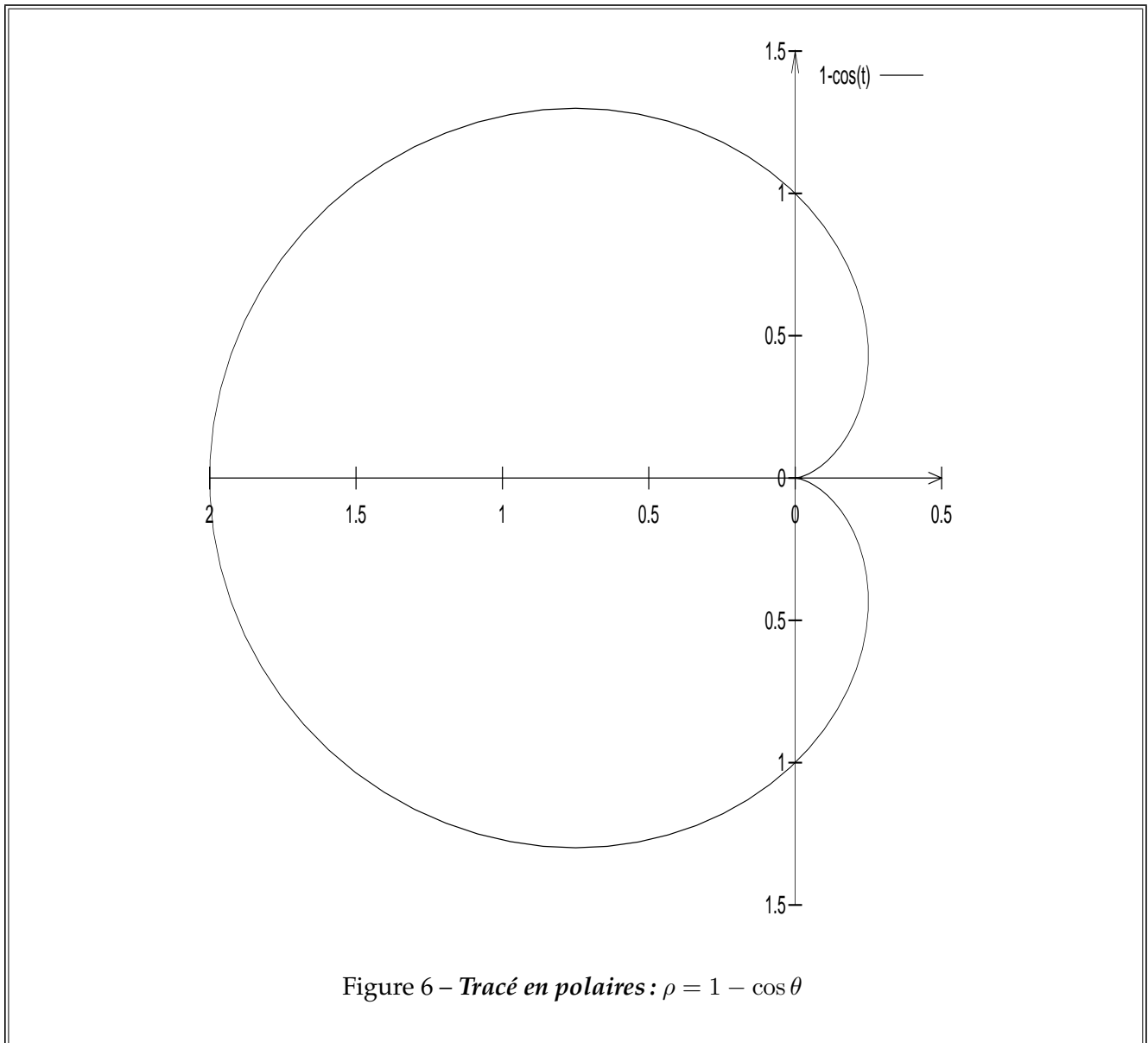
On a  $\rho' = \sin \theta$  qui permet d'avoir le tableau de variation :

$\theta$	0	$\pi$
$\rho'$	0	+
signe de $\rho$	+	
$\rho$	0	↗ 2
$\tan V$	0	$\infty$

$\tan V = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$ , on a facilement la tangente en  $\theta = \pi$ ,  $\rho = 2$  et  $\tan V$  est infini et donc  $V = \frac{\pi}{2}$ ,  
 en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\rho = 1$  et  $\tan V = 1$  et donc  $V = \frac{\pi}{4}$ .

Il n'y a pas de branche infinie, il ne reste qu'à tracer la courbe.

Ceci est illustré par la figure 6, ci-dessous.



### 3-7 Courbes usuelles en polaires

- On a les coniques d'équation  $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ .

$p$  est le paramètre de la conique, c'est à dire la distance du foyer à la directrice, et  $e$  est l'excentricité de la conique.

- $e < 1$ , correspond à une ellipse.
- $e = 1$ , un parabole.
- $e > 1$ , une hyperbole.

On montre ceci facilement en repassant en cartésiennes :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \rho + e\rho \cos \theta &= p \\ \rho &= p - e x \\ x^2 + y^2 &= (p - e x)^2 \\ (1 - e^2) x^2 + y^2 + 2epx &= p^2\end{aligned}$$

qui est bien l'équation de la conique précisée selon les cas.

- $\rho = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$  est une droite  $\Delta$ , à la distance  $d$  de  $O$ , normale à la droite  $\theta = \theta_0$ .

On a  $X = d$  dans le repère tourné de  $\theta_0$

- $\rho = A \cos(\theta - \theta_0)$  est le cercle passant par  $O$  de diamètre  $A$  et de centre sur la droite  $\theta = \theta_0$ .

Ce qui se montre facilement, on a ici, dans le repère tourné de  $\theta_0$  :

$$\begin{aligned}\rho^2 &= A\rho \cos(\theta - \theta_0) \\ X^2 + Y^2 &= AX \\ \left(X - \frac{A}{2}\right)^2 + Y^2 &= \frac{A^2}{4}\end{aligned}$$

## 4 Etude métrique des courbes planes paramétrées

### 4-1 Longueur d'un arc, abscisse curviligne

Ce paragraphe est applicable aux courbes paramétrées de l'espace.

**Définition :** Soit  $C$  un arc paramétré du plan, ou de l'espace, tel que :

$M(t)$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  avec  $x, y, z$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

La **longueur** de  $C$  entre  $M(a)$  et  $M(b)$  est selon les cas :

$$\begin{aligned}L(C) &= \int_a^b \|\overrightarrow{M'(t)}\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ L(C) &= \int_a^b \|\overrightarrow{M'(t)}\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt\end{aligned}$$

**Théorème :**

Dans le cas d'une courbe plane défini en coordonnées polaires, la longueur de  $C$  entre  $M(\theta_0)$  et  $M(\theta_1)$  est :

$$L(C) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|\overrightarrow{M'(\theta)}\| d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

**Démonstration :** On a vu que  $\overrightarrow{M'(\theta)} = \rho'(\theta) \vec{u}_r + \rho(\theta) \vec{u}_\theta$  ce qui fournit immédiatement sa norme. ■

**Définition :**  $C$  un arc paramétré du plan ou de l'espace, de classe  $C^1$  sur  $I$ . On appelle **abscisse curviligne** de  $C$  dans le sens des  $t$  (ou  $\theta$ ) croissants et d'origine  $M(t_0)$  (ou  $M(\theta_0)$ ), selon les cas :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\overrightarrow{M'(u)}\| du$$

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \|\overrightarrow{M'(\varphi)}\| d\varphi$$

On a alors

$$\frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{M'(t)}\| \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{d\theta} = \|\overrightarrow{M'(\theta)}\|$$

ou encore, toujours selon les cas :

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

## 4-2 Repère de Frenet

**Définition :**  $C$  un arc paramétré du plan, de classe  $C^1$  sur  $I$ .  $M_{t_0}$  un point régulier de  $C$ .

$(M_{t_0}, \vec{T}, \vec{N})$  est le **repère de Frenet** au point  $M_{t_0}$  avec

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|} \text{ calculé au point considéré}$$

et  $(\vec{T}, \vec{N})$  orthonormal direct.

Voir la figure 7, de la présente page.

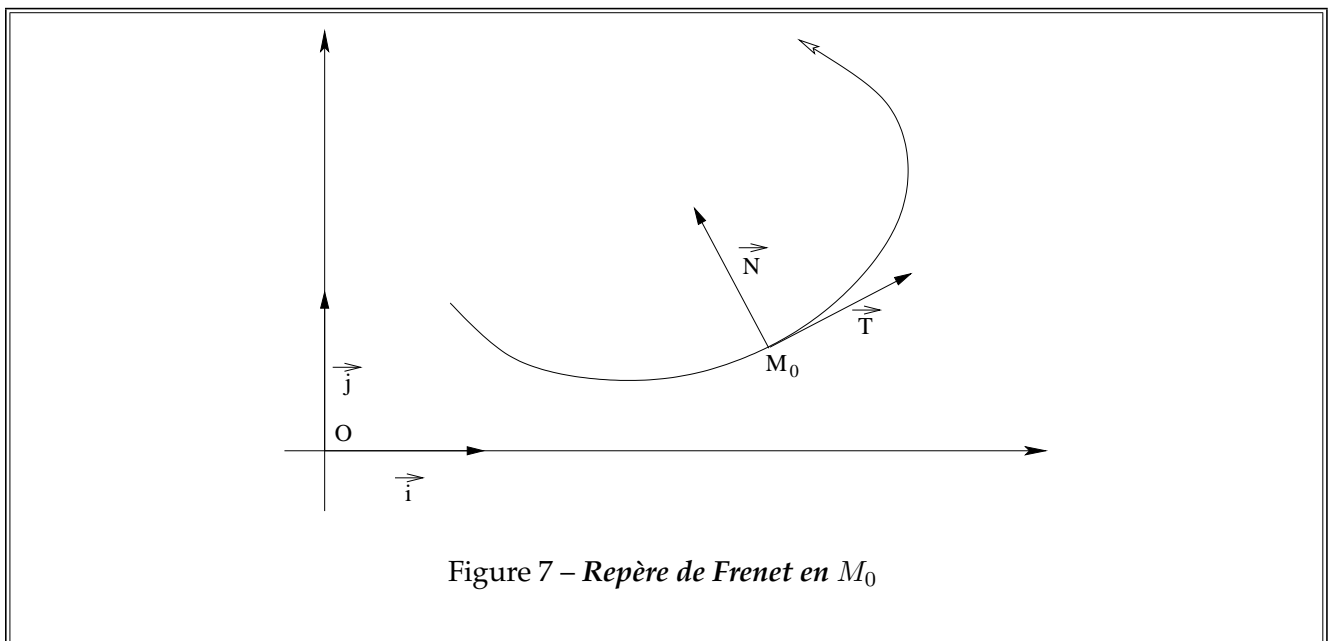


Figure 7 – Repère de Frenet en  $M_0$

**Définition :** Quand  $C$  est paramétré par  $s$  une abscisse curviligne, on dit que le paramétrage est **normal**.

**Théorème :**  $C$  un arc paramétré du plan, de classe  $C^2$  sur  $I$ . Alors  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  est colinéaire à  $\vec{N}$ .

**Démonstration :** On a  $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ , d'où, en dérivant,  $2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$ ,

ce qui entraîne  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  normal à  $\vec{T}$ , donc colinéaire à  $\vec{N}$ . ■

On a ici une différence avec les conventions des physiciens.

Pour nous,  $(\vec{T}, \vec{N})$  est toujours direct,

tandis que pour les physiciens,  $\vec{N}$  dépend de la concavité, c'est à dire du fait qu'on tourne sur la gauche ou sur la droite. Il est ainsi toujours tourné vers l'intérieur de la courbe.

### 4-3 Courbure d'une courbe plane, rayon de courbure, centre de Courbure, cercle osculateur

**Définition :** Le **rayon de courbure**  $R$ , la **courbure**  $\gamma$  en un point sont donnés par

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

C'est la première formule de Frenet.

**Définition :** Le **centre de courbure**  $\Omega$  est

$$\Omega = M + R \vec{N}$$

Le **cercle de courbure** ou **cercle osculateur** est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ . C'est le cercle le « mieux » tangent à la courbe au point  $M$ .

On regardera avec soin la figure 8, page suivante.

**Théorème :** On a aussi

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T} = -\frac{1}{R} \vec{T}$$

C'est la deuxième formule de Frenet.

**Démonstration :**  $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ , qu'on dérive  $2\vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0$ . D'où  $\frac{d\vec{N}}{ds}$  est colinéaire à  $\vec{T}$ .

De plus,  $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$ , qu'on dérive aussi,  $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$ . Mais  $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma$ .

On a donc  $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = -\gamma$  et enfin  $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}$ . ■

Si  $R > 0$ , on tourne à gauche et si  $R < 0$ , on tourne à droite.

(la convention est différente de celle des physiciens pour lesquels  $R$  est le rayon de courbure géométrique c'est à dire qu'on a toujours  $R > 0$ )

### 4-4 Calcul élémentaire de la courbure en un point birégulier

On considère la fonction anglaise associée  $\varphi$  qui est l'angle entre  $Ox$  et  $\vec{T}$ ,  $\varphi = \widehat{(i, \vec{T})}$  d'où, en paramétriques :

$$\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} / \frac{ds}{dt} \\ \frac{dy}{dt} / \frac{ds}{dt} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

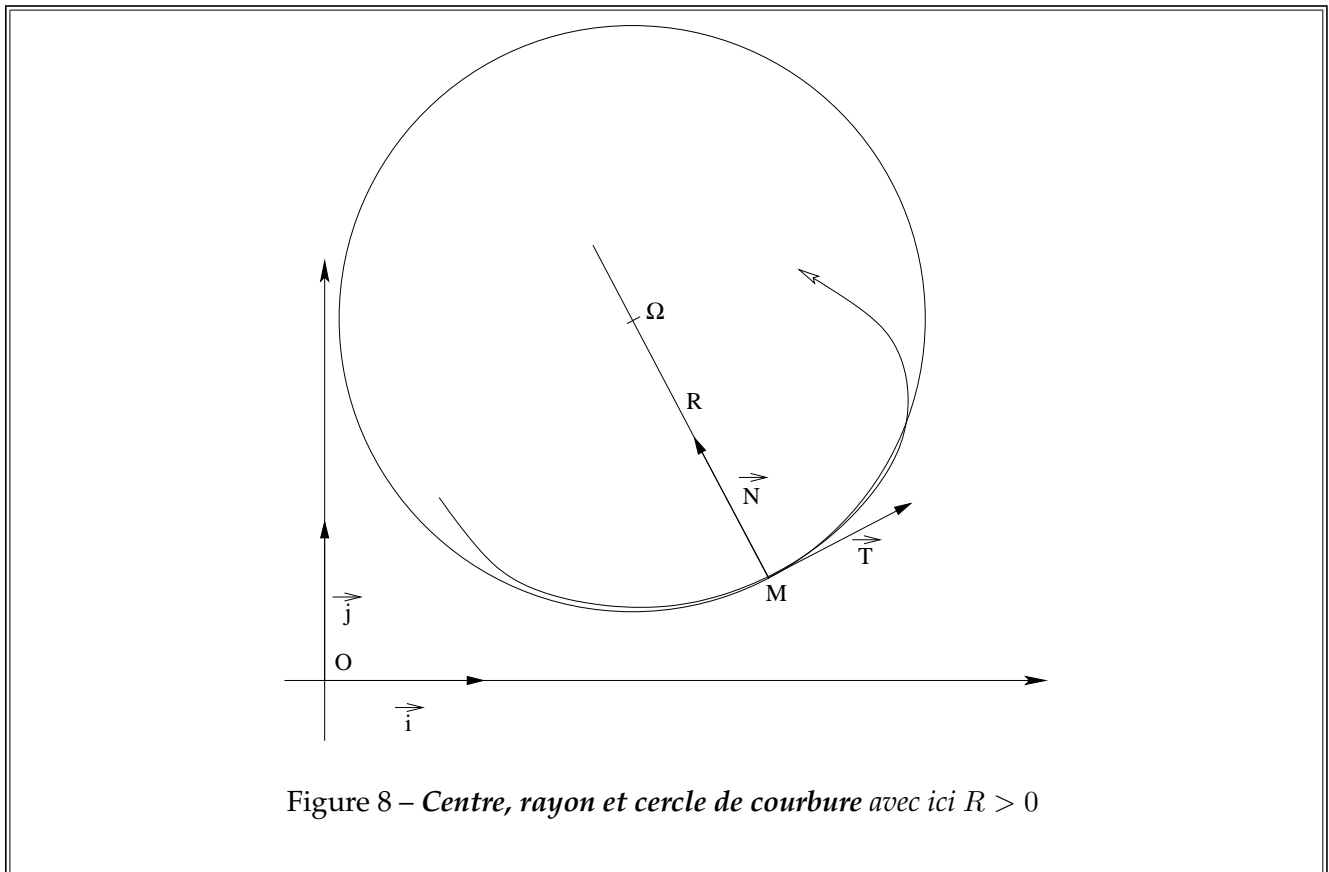


Figure 8 – Centre, rayon et cercle de courbure avec ici  $R > 0$

En polaires, on a :

$$\varphi = \theta + V$$

**Théorème :** Avec les notations précédentes, on a

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} \quad R = \frac{ds}{d\varphi}$$

**Démonstration :**  $\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  qu'on dérive par rapport à  $s$ . D'où  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \times \frac{d\varphi}{ds} \\ \cos \varphi \times \frac{d\varphi}{ds} \end{pmatrix}$ .

Ce qui donne immédiatement  $\gamma = \frac{d\varphi}{ds}$ . ■

#### 4-5 Calcul pratique de la courbure en utilisant la fonction angulaire associée $\varphi$

On remarque que dans tous les cas, on a besoin de  $\frac{ds}{dt}$  ou de  $\frac{ds}{d\theta}$ .

- En paramétriques, on peut parfois « reconnaître » directement la fonction  $\varphi(t)$  en écrivant  $\vec{T}$ .  
Si on ne reconnaît pas cette fonction, on écrit, à partir de  $\vec{T}$  :

$$\tan \varphi = \frac{y'}{x'}$$

Expression que l'on simplifie avant de dériver :

$$(1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{(1 + \tan^2 \varphi)}$$

Alors, on calcule facilement

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dt} / \frac{d\varphi}{dt}$$

- En polaires :

$\varphi = \theta + V$  avec  $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$ , en dérivant après simplification,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$$

Ce qui permet de calculer :

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta} / \frac{d\varphi}{d\theta}$$

**Exemple :** On va chercher le rayon de courbure en tous points de la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t) \sin t \\ y = \sin^2 t \cos t \end{cases}$$

On obtient facilement :  $\begin{cases} x' = (3 \cos^2 t - 1) \cos t \\ y' = \sin t (3 \cos^2 t - 1) \end{cases}$

d'où  $\frac{ds}{dt} = |3 \cos^2 t - 1|$  et  $\tan \varphi = \tan t$ , ce qui donne  $\frac{d\varphi}{dt} = 1$ .

Enfin,  $R = \frac{ds}{d\varphi} = |3 \cos^2 t - 1|$

On peut continuer le calcul et on obtient :  $\vec{T} = \text{signe}(3 \cos^2 t - 1) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ,

puis :  $\vec{N} = \text{signe}(3 \cos^2 t - 1) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées du centre de courbure sont donc :  $\begin{cases} x = 2 \sin^3 t \\ y = 2 \cos^3 t \end{cases}$ .

**Exemple :** On va chercher le rayon de courbure en tous points de la courbe d'équation  $\rho = 1 - \cos \theta$  en coordonnées polaires.

On a déjà calculé  $\tan V = \tan \frac{\theta}{2}$ , et ainsi  $\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{2}$ , puis  $\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{3}{2}$ .

$\rho^2 + \rho'^2 = 2(1 - \cos \theta)$  qui donne  $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$ .

Enfin,  $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}{3}$ .

#### 4-6 Calcul direct des éléments de courbure

On peut aussi rechercher, si on aime les calculs, des formules directes donnant courbure et rayon de courbure.

- Si  $\frac{y'}{x'}$  ou  $\frac{\rho}{\rho'}$  ne se simplifient pas du tout, les calculs sont les mêmes que ceux faits en utilisant la fonction angulaire associée,
- mais, si  $\frac{y'}{x'}$  ou  $\frac{\rho}{\rho'}$  se simplifient, ne serait-ce qu'un peu, les calculs seront plus longs, et souvent plus complexes, en utilisant le calcul direct qu'en utilisant la fonction angulaire associée.

C'est pourquoi, on réserve cette méthode quand on travaille pour une valeur particulière du paramètre.

- Dans le cas  $\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$

$$\vec{T} : \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{N} : \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}$$

$$\Omega : \begin{cases} X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \\ Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- Dans le cas  $y = f(x)$ , on considère qu'on a une courbe paramétrée par  $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$ .

Ceci évite d'avoir à mémoriser de nouvelles formules...

- Dans le cas des coordonnées polaires  $\rho = \rho(\theta)$  :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''}$$

**Démonstration :** Il nous faut démontrer ces dernières formules, en particulier :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''}$$

En paramétriques, on a :  $(1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'$  et  $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}$

$$\text{donne: } R = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\frac{y''x' - y'x''}{x'^2}} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x' - y'x''} \cdot \frac{x'^2}{1 + \frac{y'^2}{x'^2}}$$

$$\text{En polaires, } \tan V = \frac{\rho}{\rho'} \text{ donne: } \frac{dV}{d\theta} = \frac{\frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2}}{1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2}} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} \quad \text{et donc: } \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$

$$\text{Et enfin, } R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''} \quad \blacksquare$$

Dans le cas d'une courbe définie en coordonnées polaire, les **points d'inflexion** vérifient

$$\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho'' = 0$$

puisque en un point d'inflexion, la courbure est nulle.

## 4-7 Cas particulier de la valeur 0 du paramètre

Il s'agit ici du cas où on utilisera systématiquement les formules de calcul direct.

- Enfin, dans le cas où on est en paramétriques et où  $\Omega$  correspond à la valeur 0 du paramètre. Un développement limité à l'ordre 2 de  $x(t)$  et  $y(t)$  en 0 fournit, par la formule de Taylor,

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$x'(0), x''(0), y'(0), y''(0)$  qui permettent de calculer facilement  $R$ .

- On peut faire la même chose en polaires si on cherche la courbure à la valeur 0 de  $\theta$ . Un développement limité à l'ordre 2 de  $\rho(\theta)$  en 0 fournit  $\rho(0), \rho'(0)$ , et  $\rho''(0)$ .

$$\rho(\theta) = \rho(0) + \rho'(0)\theta + \frac{\rho''(0)}{2}\theta^2 + o(\theta^2)$$

**Exemple :** On va chercher la courbure de la courbe d'équation polaire  $\rho(\theta) = \frac{\cos \theta - 2 \sin \theta}{1 + \sin^3 \theta}$  au point  $(0,1)$  correspondant à la valeur 0 du paramètre.

$$\rho(\theta) = \frac{1 - 2\theta - \theta^2/2 + o(\theta^2)}{1 + o(\theta^2)} = 1 - 2\theta - \theta^2/2 + o(\theta^2)$$

Ce qui nous donne :  $\rho(0) = 1, \rho'(0) = -2$  et  $\rho''(0) = -1$  et enfin  $\gamma = \frac{5^{3/2}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

## 5 Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes

### 5-1 Trajectoire orthogonale

**Définition :** Soit  $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$  une famille de courbes.

On appelle trajectoire orthogonale de  $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$  toute courbe  $\Gamma$  qui coupe chaque  $C_\lambda$  à angle droit.

En général il y a une famille  $(\Gamma_\mu)_{\mu \in K}$  de courbes qui conviennent.

### 5-2 Recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de courbes paramétrées

Soit une famille de courbes  $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$  telle que  $(t, \lambda) \rightarrow M(t, \lambda)$  soit de classe  $C^1$  sur  $I \times J$ .

On cherche les trajectoires orthogonales  $\Gamma$  de  $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$  sous la forme  $t \rightarrow M(t, \lambda(t))$  pour  $t \in I$ .

C'est à dire avec  $\lambda$  dépendant de  $t$ .

La tangente à  $C_\lambda$  en  $M(t, \lambda)$  est dirigée par  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$ , tandis que,

la tangente à  $\Gamma$  en  $M(t, \lambda(t))$ , qui est le même point, est dirigée par  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}$ .

On a donc

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \right) = 0$$

c'est à dire :

$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = 0$$

On résout cette équation différentielle (en général non linéaire !) du premier ordre en  $\lambda$  pour obtenir une famille  $(\Gamma_\mu)_{\mu \in K}$  de courbes, trajectoires orthogonales des  $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$ .

**Exemple :** Trajectoire orthogonales des hyperboles d'équation  $xy = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ .

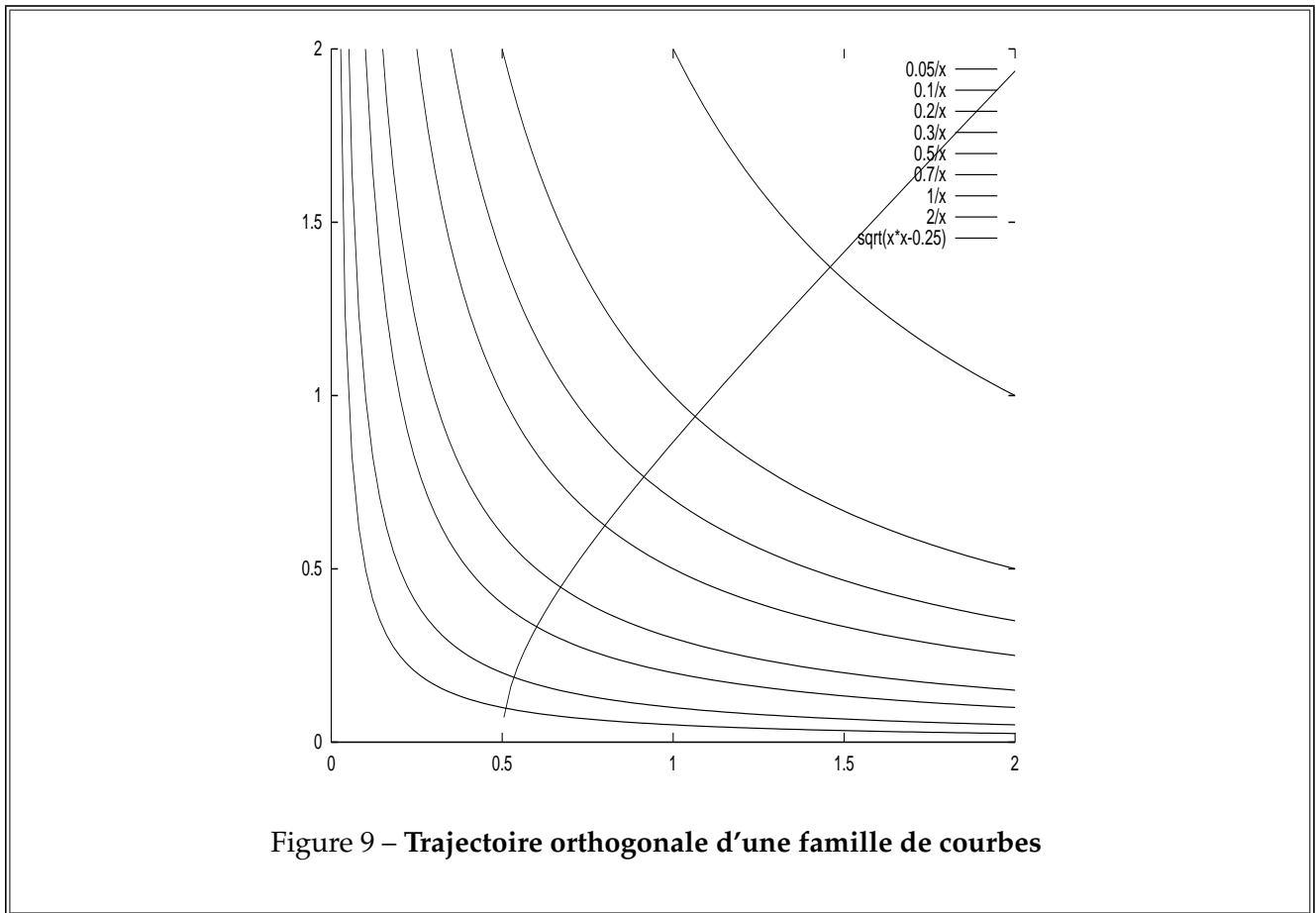


Figure 9 – Trajectoire orthogonale d'une famille de courbes

La figure 9, ci-dessous, montre une trajectoire orthogonale d'une famille de courbes.

On paramètre ces hyperboles  $M : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\lambda}{t} \end{cases}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} : \begin{cases} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{cases}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} : \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{t} \end{cases}$

On cherche  $\lambda$  sous la forme  $\lambda(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} + \lambda'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{t^4} - \frac{\lambda \lambda'}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

On pose  $u = \lambda^2$ , on obtient :

$$1 + \frac{u}{t^4} - \frac{u'}{2t^3} = 0$$

qui est linéaire du premier ordre.  $u = kt^2$  est solution de l'équation homogène associée. On cherche la solution

générale par variation de la constante.

$$\begin{aligned}
 u &= kt^2 \\
 u' &= k't^2 + 2kt \\
 1 + \frac{u}{t^4} - \frac{u'}{2t^3} &= 1 + \frac{k}{t^2} - \frac{k'}{2t} - \frac{k}{t^2} = 1 - \frac{k'}{2t} = 0 \\
 k' &= 2t \\
 k &= t^2 + \mu \\
 u &= (t^2 + \mu)t^2 = \lambda^2 \\
 \lambda &= \pm t\sqrt{t^2 + \mu} \\
 y = \pm\sqrt{t^2 + \mu} \left. \begin{array}{l} x = t \end{array} \right\} &\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \mu
 \end{aligned}$$

On obtient un autre réseau d'hyperboles.

## 6 Compléments

### 6-1 Avec Maple

- « plot » permet de tracer des courbes planes du type  $y = f(x)$  ou des courbes paramétrées ou des courbes définies en coordonnées polaires. On va donner les commandes pour tracer le cercle trigonométrique ou une partie de celui-ci.
 

```

      > plot(sqrt(1-x*x), x=-1..1);
      > plot([cos(t), sin(t), t=0..2*Pi], scaling=constrained);
      > plot([rho, theta, theta=0..2*Pi], coords=polar, scaling=constrained);
      
```
- On peut obtenir un graphe mélangeant les types de coordonnées en utilisant la fonction « display ».
- « implicitplot » permet lui de tracer une courbe du type  $f(x,y) = 0$ . Attention, il faut auparavant charger le package « plots ».
 

```

      > with(plots);
      > implicitplot(x^2+y^2-1, x=-1.2..1.2, y=-1.2..1.2);
      
```
- Toujours dans le même package, on trouve « spacecurve » pour tracer une courbe paramétrée de l'espace.
- Signalons enfin qu'on peut toujours tracer plusieurs courbes du même type (classique, paramétrée, polaire, implicite, de l'espace) en séparant les définitions de virgules et en les embrassant par { }.
 

```

      > plot({sqrt(1-x*x), -sqrt(1-x*x)}, x=-1..1);
      > plot([cos(t), sin(t), t=0..2*Pi], [cos(2*t), sin(3*t), t=0..Pi]);
      
```

### 6-2 Les mathématiciens du chapitre

Ils sont trop nombreux ici. On ne peut pas ne pas reciter Euler par exemple. mais aussi :

**Frenet Frédéric 1816-1900** Mathématicien français né à Périgueux, il s'est spécialisé en géométrie différentielle.