

Sommaire

1 Nappes Paramétrées	1	2-3 Tangente à une courbe	5
1-1 Nappe paramétrée	1	2-4 Tangente à une intersection de surfaces	6
1-2 Plan tangent	1	2-5 Projection d'une courbe	6
1-3 Courbe tracée sur une nappe	3	2-6 Equation cartésienne d'une nappe	6
1-4 Paramétrisation cartésienne	3	3 Lignes de Plus Grande Pente	7
2 Surfaces en cartésiennes	4	3-1 Ligne de plus grande pente	7
2-1 Surface d'équation $F(x,y,z) = 0$	4	3-2 Recherche des lignes...	7
2-2 Plan tangent en un point non singulier	5	4 Avec Maple	8

On verra trois façons principales de définir une surface :

- comme nappe paramétrée, voir au **1**,
- en équation cartésienne, voir au **2**,
- et enfin en paramétrisation cartésienne qui peut se voir comme une nappe paramétrée ou comme une équation cartésienne, voir au **1-4**.

Ainsi, un même objet géométrique, la « surface », peut être décrite de différentes façons...

1 Nappes Paramétrées

1-1 Nappe paramétrée

Définition : Soit \mathcal{D} un ouvert de \mathbb{R}^2 , et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe \mathcal{C}^1 .

$\mathcal{S} = f(\mathcal{D})$ est appelée **nappe paramétrée** par f . En pratique,

$$M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathcal{D}, \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Si f est de classe \mathcal{C}^k , on parle de nappe paramétrée de classe \mathcal{C}^k .

Définition : Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, f)$ une nappe paramétrée de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$),

$$M_0 : \begin{pmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{pmatrix} \text{ un point de la nappe.}$$

On dit que M_0 est **régulier** $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ forment une famille libre

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \right) \text{ forment une famille libre } \Leftrightarrow \text{ ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.}$$

1-2 Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée

Théorème : Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, f)$ une nappe paramétrée de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$),

$$M_0 : \begin{pmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ un point régulier, alors } \mathcal{S} \text{ admet un plan tangent en } M_0.$$

C'est le plan $\left(M_0, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$. Son équation est :

$$\begin{vmatrix} (X - x_0) & \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ (Y - y_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ (Z - z_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Le vecteur : $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$ est normal à la surface au point.

Démonstration : $\overrightarrow{M_0 M} = (u - u_0) \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) + (v - v_0) \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) + o(u - u_0, v - v_0)$

ce qui prouve que $\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{\overrightarrow{M_0 M}}{\|\overrightarrow{M_0 M}\|}$ est bien dans la direction du plan indiqué. ■

La figure 1, ci-dessous, montre le plan tangent et le vecteur normal à une surface.

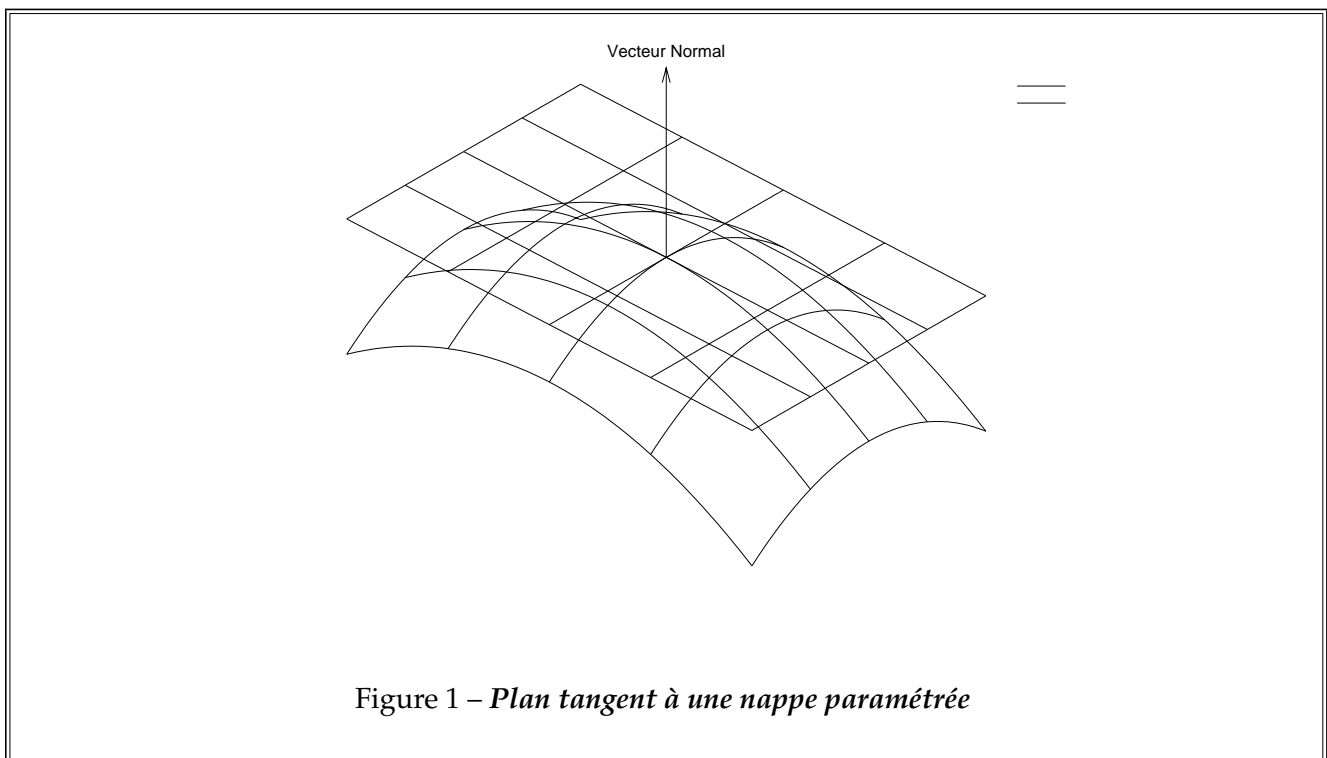


Figure 1 – Plan tangent à une nappe paramétrée

Les courbes tracées sur la surface sont les courbes à u ou à v constants, il apparaît bien ici que le plan tangent est engendré par les tangentes à ces courbes au point considéré.

Exemple : On va chercher, s'il existe, le plan tangent à la nappe : $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$ au point $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

correspondant aux valeurs $u = 2$ et $v = 1$ des paramètres.

On calcule les dérivées partielles par rapport à u puis leur valeur au point :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial u} = 2u \end{cases} \text{ qui au point indiqué est le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On fait de même avec v :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial v} = -1 \\ \frac{\partial z}{\partial v} = -2v \end{cases} \quad \text{qui au point indiqué est le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le plan tangent est donc, s'il existe, d'équation : $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$, soit : $2x + 6y - 2z = 6$.

Enfin, le plan tangent (qui existe !) est d'équation : $x + 3y - z = 3$

1-3 Courbe tracée sur une nappe paramétrée

Elle peut correspondre à u ou v constant, ce sont par exemple les courbes que trace Maple quand il trace en « fil de fer » une nappe paramétrée.

D'une façon plus générale, une courbe tracée sur une nappe paramétrée correspond souvent à avoir l'un des paramètres en fonction de l'autre (via si possible une fonction de classe \mathcal{C}^1). On obtient ainsi une courbe paramétrée de l'espace (de classe \mathcal{C}^1).

La tangente à la courbe, quand elle existe est alors tracée sur le plan tangent. On montrera ceci dans un autre cadre.

1-4 Paramétrisation cartésienne

Définition : On dit qu'on a une paramétrisation cartésienne quand on a x et y comme paramètres. On note alors simplement

$$z = f(x, y)$$

$(x, y) \in \mathcal{D}$, avec f de classe \mathcal{C}^k .

Théorème : Soit \mathcal{S} une nappe paramétrée cartésienne définie par $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$,

avec f de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$. Soit $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point de \mathcal{S} . Soit

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- Si $s^2 - rt < 0$, la surface est en ballon en M_0 ,
 - au dessus pour $r > 0$,
 - en dessous pour $r < 0$.
- Si $s^2 - rt > 0$, la surface est en col en M_0 , et donc traverse le plan tangent.

Démonstration : On applique la formule de Taylor-Toung à l'ordre 2, toutes les dérivées partielles étant prises en (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \underbrace{\left((x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{=z_1 - z_0} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)}_{=z - z_1} + o \left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

Le point M_1 de coordonnées (x, y, z_1) étant un point du plan tangent.

Le signe de $(z - z_1)$ permet de déterminer de quel côté du plan tangent est le point M .

On a :

$$z - z_1 = \frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 r + 2(x - x_0)(y - y_0)s + (y - y_0)^2 t \right) + o \left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right)$$

$(z - z_1)$ finit par être du signe de l'expression du second degré quand elle n'est pas nulle. On pose

$$\Delta = 4(s^2 - rt)$$

- $\Delta > 0$
 $z - z_1$ change de signe, on a un col,
- $\Delta < 0$
 $z - z_1$ ne change pas de signe, on a un point en ballon, son signe est celui de r .
- $\Delta = 0$

dans une certaine direction, le signe de cette expression est celui de $o \left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right)$ qu'on ne connaît pas. On ne peut pas conclure.

■

Exemple : On va chercher la nature du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de la nappe paramétrée cartésienne d'équation :

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Cette équation est clairement de classe C^2 au moins. On calcule les dérivées partielles premières et secondes.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Au point considéré, (et d'ailleurs en tous points), $r = 2, s = 0, t = -2, s^2 - rt = 4 > 0$.

Le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, comme tous les points, est en col.

2 Surfaces définies par une Equation Cartésienne

2-1 Surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$

Définition : \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^3 , $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^k, k \geq 1$. \mathcal{S} , la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) =$

0 est l'ensemble des points : $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $F(x, y, z) = 0$

Définition : \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^3 , $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^k, k \geq 1$. \mathcal{S} d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, M_0 est dit **singulier** $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Grad}}_F(M_0) = \vec{0}$

On ne confondra pas les points singuliers d'une surface définie par une équation cartésienne et les points réguliers d'une nappe paramétrée...

2-2 Plan tangent à S en un point non singulier

Théorème : \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^3 , $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$.

S d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, M_0 un point non singulier de S .

Alors S admet un plan tangent en M_0 . Ce plan passe par M_0 et est normal au vecteur $\overrightarrow{Grad_F(M_0)}$.

Son équation est donc : $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{Grad_F(M_0)} = 0$ ou encore : $dF_{M_0} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$

ou enfin : $(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

On a bien sûr la même figure que pour une nappe paramétrée. Seul le calcul du vecteur normal change.

Démonstration : On admet que S a aussi au voisinage de M_0 une représentation paramétrique de classe \mathcal{C}^1 $(u, v) \rightarrow \overrightarrow{f(u, v)}$ sur \mathcal{D} un ouvert de \mathbb{R}^2 .

M_0 correspondant aux valeurs (u_0, v_0) des paramètres. On a donc :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{D}, F(\overrightarrow{f(u, v)}) = 0 = H(u, v)$$

Sa différentielle en (u_0, v_0) est aussi nulle, $\frac{\partial H}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial H}{\partial v}(u_0, v_0) = 0$, donc, en ne précisant pas en quels points on prend les dérivées, pour alléger les notations :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

Egalités qu'on peut interpréter comme des produits scalaires :

$$\overrightarrow{Grad_F(M_0)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0, v_0) = 0$$

$$\overrightarrow{Grad_F(M_0)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0, v_0) = 0$$

Ce qui prouve que la direction du plan tangent à la nappe est le plan normal à $\overrightarrow{Grad_F(M_0)}$. ■

$z = f(x, y)$ a la particularité de pouvoir être considéré comme une nappe paramétrée par x et y , ou comme une surface d'équation cartésienne $z - f(x, y) = 0$.

Rechercher le plan tangent selon l'un ou l'autre des points de vue conduit à des calculs différents, mais au même résultat !

Exemple : On reprend la nappe d'équation $g(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$, et on cherche le plan tangent en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette équation est clairement de classe \mathcal{C}^1 au moins. Au point considéré, $\frac{\partial g}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -2$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 1$.

Le plan tangent est donc d'équation $-2(x - 1) - 2(y - 1) + z = 0$, ou encore $2x + 2y - z = 4$.

2-3 Tangente à une courbe paramétrée tracée sur une surface

Théorème : Γ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 tracée sur S de classe \mathcal{C}^1 . En un point régulier de Γ , et non singulier de S , la tangente à Γ est tracée sur le plan tangent à S .

Démonstration : $\Gamma : M : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in I, \text{ et } \mathcal{S} : F(x,y,z) = 0, M_0 \text{ correspondant à } t_0 \text{ et on a :}$

$$\forall t \in I, F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

On différencie en t_0 , cela donne : $\frac{\partial F}{\partial x} \times x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \times y'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \times z'(t_0) = 0$

On le réécrit : $\overrightarrow{Grad_F(M_0)} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = 0$

Ceci prouve que le vecteur tangent à Γ est dans la direction du plan tangent à \mathcal{S} , et comme tous deux passent par M_0 , on a le résultat annoncé. ■

2-4 Tangente à une courbe intersection de surfaces cartésiennes

Théorème : \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux surfaces de classe C^1 d'équations $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Soit M_0 un point non singulier de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , tel que les plans tangents à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en M_0 sont distincts.

Et enfin : $\Gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

Alors, la tangente à Γ en M_0 , si elle existe, est l'intersection des deux plans tangents. Elle est dirigée par

$$\overrightarrow{Grad_{F_1}(M_0)} \wedge \overrightarrow{Grad_{F_2}(M_0)}$$

Démonstration : Puisque la tangente, si elle existe, est tracée sur chacun des plans tangents... ■

2-5 Projection d'une courbe sur les plans de coordonnées

Une courbe dans l'espace peut toujours être définie par intersection de surfaces cartésiennes ou en paramétriques. On va voir comment obtenir ces projections (orthogonales) dans chacun des cas.

- Par intersection de surfaces. $\Gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} (x,y,z) \in \mathcal{U}$.

Il suffit d'éliminer z entre les deux équations pour trouver l'équation d'une courbe de xOy qui contient la projection cherchée. En effet, une relation entre x et y , indépendante de z , vérifiée par les points de Γ est aussi vérifiée par les points de sa projection...

- En paramétriques. $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} t \in I$.

C'est encore plus simple, pour avoir la projection sur xOy , il suffit « d'oublier » z !

$$\text{D'où : } \Gamma' : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in I$$

2-6 Equation cartésienne d'une nappe paramétrée

On a la nappe paramétrée $\mathcal{S} : (u,v) \in \mathcal{D}, \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

On cherche l'équation cartésienne d'une surface \mathcal{S}' qui contient \mathcal{S} .

Cela revient à chercher une relation entre x,y,z qui ne contient ni u ni v .

Pour cela, on élimine les 2 paramètres entre les 3 équations.

On élimine l'un des 2 paramètres **puis** l'autre. Il faut prendre soin d'éviter les dénominateurs, qui nous obligeraient à considérer des cas particuliers inutilement. On travaille à priori par implications.

- Si les relations sont polynomiales, on fabrique de proche en proche des relations de degré de plus en plus petits.
- Si on a de la trigonométrie, c'est souvent $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ qui permet d'avancer.

Pour savoir si on a ajouté des points, il faut chercher si pour un point de la surface on peut retrouver les valeurs des paramètres qui correspondent à ce point. C'est toujours une tâche un peu délicate, qu'on ne réalise qu'à la demande explicite de l'énoncé ...

Exemple : On va chercher une équation cartésienne de la nappe paramétrée :
$$\begin{cases} x = u - v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} .$$

On peut facilement éliminer u en utilisant la première équation : $u = x + v$.

Ce qui donne :
$$\begin{cases} y = xv + v^2 \\ z = x^2 + 2xv + 2v^2 \end{cases} ' .$$

ou encore, en éliminant les termes en v^2 de la seconde équation :
$$\begin{cases} y = xv + v^2 \\ z - 2y = x^2 \end{cases} .$$

La dernière équation ne contient plus de paramètres... L'équation cherchée est $x^2 + 2y - z = 0$. C'est l'équation d'une surface \mathcal{S}' qui contient la nappe paramétrée.

3 Lignes de Plus Grande Pente

3-1 Ligne de plus grande pente

Définition : Les **lignes de plus grand pente** d'une surface sont les trajectoires orthogonales des lignes de niveau de cette surface.

3-2 Recherche des lignes de plus grande pente de $z = f(x, y)$

Les lignes de niveau vérifient $\lambda = f(x, y)$. On paramètre ces courbes par t , on obtient $M(t, \lambda) : \begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \\ z = \lambda \end{cases}$

On applique alors le chapitre précédent relatif aux trajectoires orthogonales. On rappelle que cela revient à résoudre :

$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = 0$$

Exemple : On cherche, en liaison avec le chapitre précédent, les lignes de plus grande pente de la surface d'équation $z = xy$.

Les lignes de niveau sont les hyperboles $xy = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, comme on l'a déjà fait :

On paramètre ces hyperboles $M : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\lambda}{t} \end{cases}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} : \begin{cases} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{cases}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} : \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{t} \end{cases}$

On cherche λ sous la forme $\lambda(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} + \lambda'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{t^4} - \frac{\lambda \lambda'}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

On pose $u = \lambda^2$, on obtient : $1 + \frac{u}{t^4} - \frac{u'}{2t^3} = 0$ qui est linéaire du premier ordre. On cherche la solution générale comme au chapitre précédent.

On obtient les courbes vérifiant :
$$\begin{cases} z = xy \\ y^2 - x^2 = \mu \end{cases} .$$

Leurs projections orthogonales sur le plan horizontal forment un réseau d'hyperboles.

4 Avec Maple

« `plot3d` » permet de tracer une (ou plusieurs avec { }) surfaces en cartésiennes ou nappes paramétrées. On regardera les options « `axes`, `style`, `scaling`, `view`, `orientation` »

- Courbe d'équation : $z = f(x, y)$
> `plot3d(z, x=a..b, y=c..d, axes=normal) ;`
- Courbe en paramétriques : $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$
> `plot3d([x, y, z], u=a..b, v=c..d, axes=normal) ;`
On regardera ici les options « `coords` » (« `cylindrical`, `spherical` »)
- On rappelle « `spacecurve` » du package « `plots` » pour les courbes en paramétrique
- Dans le même package « `implicitplot3d` » pour $f(x, y, z) = 0$
> `implicitplot3d(x^2+y^2-z^2-1, x=a..b, y=c..d, z=e..f) ;`
- Enfin, « `display3d` » permet de mélanger différents types de graphiques