## Sommaire



---

L'objet de ce chapitre est, en particulier, d'étudier les suites de points de $\mathbb{R}^p$ et la continuité des fonctions de plusieurs variables. Sauf mention contraire, dans tout le chapitre $E$ désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$.

# 1 Espace Vectoriel Normé $\mathbb{R}^p$

## 1-1 Norme et distance associée

En pratique, on n'utilisera que la norme euclidienne et sa distance associée.

**Définition :**

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \|u\| \end{array}\right. \text{ est une } \textbf{norme} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall u,v \in E,\ \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda.u\| = |\lambda|\,\|u\| \text{ (positive homogénéité)} \\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ (séparation)} \end{array}\right.$$

La norme d'un vecteur $u$ est souvent notée $\|u\|$

> Même si on parle souvent de **la** norme d'un vecteur, on verra qu'il y a une infinité de normes différentes...

**Exemple :**

**1)** $E = \mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{array}{ll} \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} & \text{est la norme usuelle, mais} \\ \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| & \text{est aussi une norme, de même que} \\ \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|) & \end{array}\right.$

**2)** $\mathbb{R}^p$ a une structure euclidienne canonique, et si $u = (x_1,x_2,\ldots,x_p)$,

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2}$$

cette norme est appelée norme euclidienne. Sauf mention contraire, c'est elle qu'on utilise.

**Définition :** $d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ est une **distance** $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d(u,v) = d(v,u) \text{ (symétrie)} \\ d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w) \text{ (inégalité triangulaire)} \\ d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (séparation)} \end{array}\right.$

**Théorème :** $d(u,v) = \|v-u\|$ est une distance.

**Démonstration :**
$u - v = -(v - u)$ prouve la symétrie.
$w - u = (w - v) + (v - u)$ prouve l'inégalité triangulaire.
La séparation de la norme prouve enfin la séparation de la distance associée. ■

Toute norme induit donc une distance, par contre, toute distance ne provient pas d'une norme. On peut citer par exemple la distance ultramétrique : $d(u,v) = 1$ pour $u \neq v$ et $d(u,u) = 0$.
Encore une fois, sauf mention contraire, on utilise la distance induite par la norme euclidienne.
Signalons que dans tout le reste du chapitre, on a souvent préféré la notion de norme, plus habituelle. Cependant, on peut remplacer dans les expressions en $\varepsilon$ les normes par les distances correspondantes.

## 1-2 Boules, parties bornées, parties ouvertes ou fermées

**Définition :** Une **boule ouverte** de centre $u_0$ et de rayon $r$ est :

$$B_O(u_0,r) = \{v \in \mathbb{R}^p, d(u_0,v) < r\}$$

**Définition :** Une **boule fermée** de centre $u_0$ et de rayon $r$ est :

$$B_F(u_0,r) = \{v \in \mathbb{R}^p, d(u_0,v) \leqslant r\}$$

**Définition :** Une **partie bornée** de $\mathbb{R}^p$ est une partie de $\mathbb{R}^p$ incluse dans une certaine boule (ouverte ou fermée).

**Définition :** Une **partie ouverte** ou un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ est une partie $A$ telle que

$$\forall u \in A, \quad \exists r > 0, \quad B_O(u,r) \subset A$$

C'est à dire que tout point de $A$ est le centre d'une boule ouverte, de rayon non nul, complètement incluse dans $A$.

**Définition :** Une **partie fermée** ou un **fermé** de $\mathbb{R}^p$ est une partie telle que son complémentaire $A$ soit un ouvert.

> Une boule ouverte est un ouvet, une boule fermée est un fermé.
> $\mathbb{R}^p$ et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.

La figure 1, ci-dessous, représente des boules du plan correspondant aux trois normes de $\mathbb{R}^2$ décrites dans l'exemple page précédente.

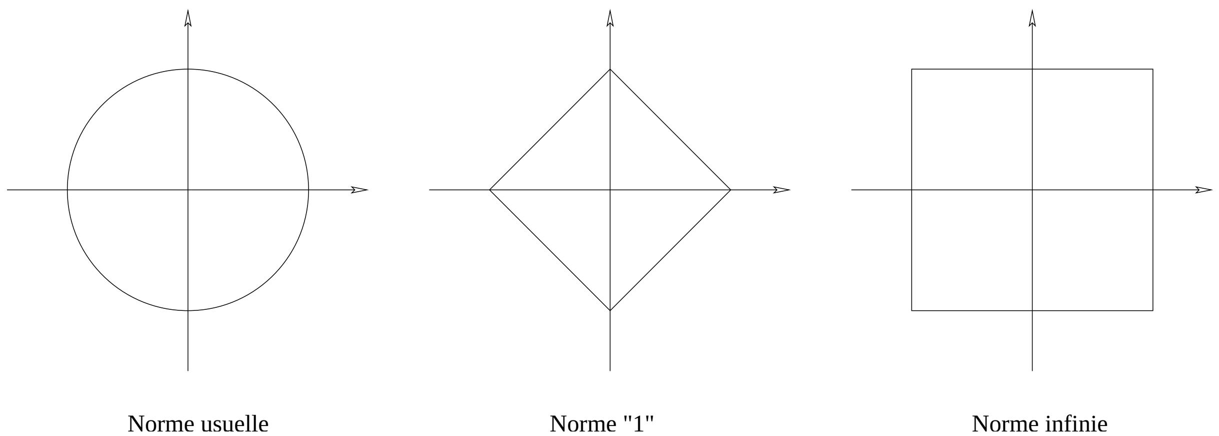


Figure 1 – **Exemples de boules de $\mathbb{R}^2$ pour différentes normes**

# 2 Suite de points de $\mathbb{R}^p$

Il s'agit de généraliser la notion de suite réelle.
On ne parlera pas de suites croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée...
Mais, on parlera de suite convergente, bornée, de sous suite...

## 2-1 Suite de points de $\mathbb{R}^p$

**Définition :** Une suite de points de $\mathbb{R}^p$ est une application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^p \\ n & \mapsto & u(n) \end{array} \right.$
La suite $u$ sera notée $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore $(u_n)$.

**Définition :** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$.

Cela équivaut à ce que la suite réelle $(\|u_n\|)$ est bornée.

**Théorème :** L'ensemble des suites à valeur dans $\mathbb{R}^p$, muni de la somme des suites et de la multiplication par un scalaire (réel) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration :** Il s'agit de la structure habituelle de $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R}^p)$ ■

## 2-2 Convergence

Dans ce qui suit, on définira ou on utilisera, selon les cas, la notion de norme ou la notion de distance. Mais il faut bien se rendre compte que toute convergence qu'on exprime en utilisant des normes peut s'exprimer en termes de distances et vice-versa.

**Définition :** $(u_n)$ est convergente $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}^p, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon$.

**Définition :** $(u_n)$ est divergente $\Leftrightarrow (u_n)$ n'est pas convergente

On dit que $(u_n)$ converge vers $l$, que $(u_n) \to l$ quand $n \to +\infty$, ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = l$.

**Théorème :** $(u_n)$ converge : la limite $l$ est unique.

**Démonstration :** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = l, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon$
On a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = l', \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N' \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N', \quad \|u_n - l'\| \leqslant \varepsilon$
par inégalité triangulaire, pour $n \geqslant \max(N,N')$, $\|l - l'\| \leqslant 2\varepsilon$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon$, on en conclut $\|l - l'\| = 0$, et enfin $l = l'$. ■

**Théorème :** $(u_n)$ converge vers $0 \Leftrightarrow (\|u_n\|)$ converge vers $0$.

**Démonstration :** $\|u_n - 0\| = \|u_n\|$ (!...) ■

**Corollaire :** $(u_n)$ converge vers $l \Leftrightarrow (\|u_n - l\|)$ converge vers $0$.

**Théorème :** $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, \ldots, u_{p,n})$, la suite $(u_n)$ est formée de $p$ suites « coordonnées ».
$(u_n)$ converge $\Leftrightarrow$ les $p$ suites coordonnées convergent et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$.
$(u_n)$ diverge $\Leftrightarrow$ il existe une suite coordonnée qui diverge.

**Démonstration :** $(u_n)$ converge vers $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon$
mais $|u_{i,n} - l_i| \leqslant \|u_n - l\|$,
ce qui prouve que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{i,n}) = l_i$

Réciproquement,

$$\begin{array}{llll}\forall\varepsilon>0, & \exists N_1\in\mathbb{N}, & \forall n\geqslant N_1, & |u_{1,n}-l_1|\leqslant\varepsilon,\\ \forall\varepsilon>0, & \exists N_2\in\mathbb{N}, & \forall n\geqslant N_2, & |u_{2,n}-l_2|\leqslant\varepsilon,\\ \vdots & & & \\ \forall\varepsilon>0, & \exists N_p\in\mathbb{N}, & \forall n\geqslant N_p, & |u_{p,n}-l_p|\leqslant\varepsilon,\end{array}$$

On pose $N=\max\limits_{i\in\{1,2,\dots,p\}} N_i$, et pour $n\geqslant N$, $\|u_n-l\|\leqslant\sqrt{p\varepsilon^2}=\sqrt{p}\varepsilon$
ce qui prouve que $(u_n)$ converge vers $l$. ■

**Théorème :** Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration :** Soit $\varepsilon=1,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N,\ \|u_n-l\|\leqslant 1$, d'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\in B_F\left(l,\max\left(\|u_0-l\|,\|u_1-l\|,\dots,\|u_{N-1}-l\|,1\right)\right)$$

■

## 2-3 Sous suite

**Définition :** $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}^p$,$\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante. Alors la suite $(v_n)$ définie par $v_n=u_{\varphi(n)}$ est appelée **suite extraite** ou **sous suite** de la suite $(u_n)$.
C'est bien sûr une suite de $\mathbb{R}^p$.

**Théorème :** Si $(u_n)$ converge vers $l$, toute sous suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $l$.

**Démonstration :** Pour un $\varepsilon$ donné, le même $N$ convient pour la sous suite car $\varphi(n)\geqslant n$. ■

En pratique, pour montrer qu'une suite diverge, il suffit :
- de trouver une sous suite qui diverge ou
- de trouver 2 sous suites qui convergent vers des limites différentes.

## 2-4 Opérations sur les limites

**Théorème :** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=l'$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$.

**Théorème :** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$,$\lambda\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n)=\lambda l$.

# 3 Applications de $A$ non vide, $A\subset\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

## 3-1 Algèbre des applications définies sur $A$ non vide, $A\subset\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$

**Théorème :** L'ensemble des applications $A\to\mathbb{R}$, avec $A$ non vide, $A\subset\mathbb{R}^p$, muni de

$$\left\{\begin{array}{l}\text{la somme des applications, notée } +\\ \text{le produit d'une application par un scalaire, noté } \cdot\\ \text{le produit de 2 applications, noté } \times\end{array}\right.$$

a une **structure d'algèbre commutative** sur $\mathbb{R}$.

**Démonstration :** On en profite pour rappeler avec les notations du théorème la définition d'une algèbre, car toutes les démonstrations sont élémentaires..
$(\mathcal{A}(A,\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel usuel.
$(\mathcal{A}(A,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif, car
- c'est un groupe additif commutatif

- $\times$ est associative
- l'application constante 1 est élément neutre pour $\times$
- $\times$ est distributive par rapport à $+$
- $\times$ est commutative
- Enfin,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f,g \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}), \quad (\lambda \cdot f) \times g = \lambda \cdot (f \times g)$$

■

**Définition :** $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R})$, on dit que $f$ est bornée sur $A \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall u \in A, |f(u)| \leqslant M$

## 3-2 Limite et continuité en un point

Soit $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}), A \subset \mathbb{R}^p$, non vide. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\forall r > 0, \quad \exists u \in A, \quad u \neq u_0, \quad d(u,u_0) \leqslant r$$

On ne s'intéressera à la limite de $f$ qu'en de tels points.
Intuitivement, on peut dire que ces points de $A$ ne sont pas des points « isolés ».
Si, de plus, $u_0 \in A$, on pourra s'intéresser à la continuité en un tel point.

**Définition :** Dans les conditions précédentes, on dit que

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in A, u \neq u_0, \\ d(u,u_0) \leqslant r : |f(u) - l| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

**Définition :** Dans ces mêmes conditions, on dit que $f$ est continue en $u_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$.

## 3-3 Algèbre des applications continues sur $A$ non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, à valeur dans $\mathbb{R}$

**Définition :** On dit que $f$ est continue sur $A \Leftrightarrow f$ est continue en tout vecteur $u_0$ de $A$.

L'ensemble des applications continues de $A \subset \mathbb{R}^p$, non vide, dans $\mathbb{R}$, se note $\mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$.

**Théorème :** $\mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$ a une structure d'algèbre commutative, sous algèbre de $\mathcal{A}(A,\mathbb{R})$.

**Démonstration :** On en profite pour rappeler avec les notations du théorème, les conditions pour avoir une sous algèbre.
La fonction constante 1 est bien continue sur $A$ et appartient à $\mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$.
Ensuite, si $f$ et $g$ sont continues sur $A$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$, $\lambda.f$, et $f \times g$ sont continues sur $A$, car la propriété est vraie en chaque vecteur $u_0$ de $A$. La démonstration est la même que pour les fonctions de variable réelle en remplaçant certaines valeurs absolues par des normes. ■

**Théorème :** Si $f,g \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en tout vecteur $u_0$ de $A$ tel que $g(u_0) \neq 0$.

**Théorème :** Les applications « composantes » : $f_i : (u_1, u_2, \ldots, u_p) \to u_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^p$.

### 3-4 Critère séquentiel

On utilise toujours les notations des paragraphes précédents. Le critère séquentiel est un critère reliant la limite d'une fonction en un point et des limites de suites.

**Théorème :** (critère séquentiel)

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (v_n) \text{ d'éléments de } A \text{, distincts de } u_0, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u_0 \text{: } \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = l. \end{array} \right.$$

**Démonstration :**

**1)** (:)
Soit $\varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in A, u \neq u_0$, $d(u,u_0) \leqslant r$: $|f(u) - l| \leqslant \varepsilon$
mais $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u_0$, d'où pour $r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad d(v_n,u_0) \leqslant r$
ce qui donne : $|f(v_n) - l| \leqslant \varepsilon$
en résumé,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |f(v_n) - l| \leqslant \varepsilon$$

Ceci prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = l$.

**2)** ($\Leftarrow$)
On va en fait montrer la contraposée.
On sait

$$\forall l \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall r > 0, \quad \exists u \in A, \quad u \neq u_0, \quad d(u,u_0) \leqslant r \text{ et } |f(u) - l| > \varepsilon$$

Soit $l \in \mathbb{R}$, on forme une suite $(v_n)$ qui converge vers $u_0$ et telle que $f(v_n)$ ne converge pas vers $l$.
Pour cela on prend simplement $r = \dfrac{1}{n+1}$ et on appelle $v_n$ le $u$ trouvé en appliquant ce qu'on sait.
Clairement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u_0$ et $f(v_n) \nrightarrow l$ quand $n \to +\infty$ car on a toujours $|f(v_n) - l| > \varepsilon$.

∎

> Ce théorème sert souvent à montrer que $f$ n'a pas de limite en $u_0$, en cherchant astucieusement de « bonnes » suites $(v_n)$.

**Corollaire :** $f$ continue en $u_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute suite } (v_n) \text{ d'éléments de } A \text{, distincts de } u_0, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u_0 \text{: } \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(u_0). \end{array} \right.$

**Exemple :** On cherche la limite en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par application des théorèmes élémentaires.
$f(0,y) = 0$ et $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ prouve que $f$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

**Exemple :** On cherche la limite en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y}{x^2+y}$
Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(x, -x^2\right), x \in \mathbb{R} \right\}$ par application des théorèmes élémentaires.
On calcule $f\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = \dfrac{\dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}} = 2n - 1$ qui n'a pas de limite à l'infini, ce qui prouve que $f$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

### 3-5 Image d'une partie fermée bornée de $A$ par $f \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$

**Théorème :** $f \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$, $B \subset A$, $B$ une partie fermée et bornée, alors $f(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et les bornes sont atteintes.

La démonstration est admise.

## 4 Applications de $A$ non vide, $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^q$, Continuité

Il s'agit ici de fonctions de variable réelle à valeur vectorielle. On considère $\mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$ avec $A \subset \mathbb{R}$, $A$ non vide, l'ensemble des applications de $A$ dans $\mathbb{R}^q$.

### 4-1 Espace vectoriel $\mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$

**Théorème :** L'ensemble des applications de $A \subset \mathbb{R}$, $A$ non vide, dans $\mathbb{R}^q$, muni de la somme des applications et du produit par un scalaire (réel) a une structure d'espace vectoriel réel.

**Démonstration :** $A$ est non vide et $\mathbb{R}^q$ est un espace vectoriel réel ! ■

**Définition :** $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$, on dit que $f$ est bornée sur $A \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R},\quad \forall x \in A,\quad \|f(x)\| \leqslant M$

### 4-2 Limite en un point, continuité

**Définition :** $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$, on dit que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \neq x_0, \\ |x - x_0| \leqslant \eta \colon \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

**Définition :** Si, de plus, $x_0 \in A$, $f$ est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

### 4-3 Applications « composantes »

Pour $x \in A$, on a $f(x) \in \mathbb{R}^q$ et on peut donc écrire : $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x))$ avec $f_i(x)) \in \mathbb{R}$.
Définir $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$, revient ainsi à définir $q$ applications $f_1, f_2, \ldots, f_q$ de $A$ dans $\mathbb{R}$, les applications composantes.

**Théorème :** $l = (l_1,l_2,\ldots,l_q)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = l_2 \\ \vdots \\ \lim\limits_{x \to x_0} f_q(x) = l_q \end{cases}$$

**Corollaire :** $f$ est continue en $x_0 \in A \Leftrightarrow f_1,f_2,\ldots,f_q$ sont continue en $x_0$.

On retiendra l'idée que tout se passe composante par composante.
**Démonstration :** (:) Comme $|f_i(x) - l_i| \leqslant \|f(x) - l\|$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$.
($\Leftarrow$) On écrit chaque limite :

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_1 > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \neq x_0, \quad |x - x_0| \leqslant \eta_1 \colon |f_1(x) - l_1| \leqslant \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_2 > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \neq x_0, \quad |x - x_0| \leqslant \eta_2 \colon |f_2(x) - l_2| \leqslant \varepsilon \\ \quad \vdots \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_q > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \neq x_0, \quad |x - x_0| \leqslant \eta_q \colon |f_q(x) - l_q| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

On prend $\eta = \inf(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_q)$, alors,

$$\forall x \in A,\quad x \neq x_0,\quad |x - x_0| \leqslant \eta\colon \|f(x) - l\| \leqslant \sqrt{q}\varepsilon$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

### 4-4 Opérations sur les limites

**Théorème :** Soit $f,g \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$, alors

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = l + l'$$
$$\lim_{x\to x_0}(\lambda.f)(x) = \lambda\, l$$

**Démonstration :** Tout est élémentaire composante par composante. ∎

**Corollaire :** $\mathcal{C}^0(A,\mathbb{R}^q)$, avec $A$ non vide, est un espace vectoriel, sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$.

## 5 Applications de $A$ dans $\mathbb{R}^q$, $A$ non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, Continuité

Pour la limite et la continuité, on se place en un vecteur $u_0$ qui n'est pas « isolé » dans $A$, c'est à dire qui vérifie les conditions imposées pour les fonctions de plusieurs variables et à valeur réelle.
On rappelle que cela signifie : $u_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\forall r > 0$, $\exists u \in A$, $u \neq u_0$, $d(u,u_0) \leqslant r$.

### 5-1 Limite, continuité en un vecteur $u_0$

**Définition :** $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$, on dit que

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0,\quad \exists r > 0,\quad \forall u \in A,\quad u \neq u_0,\quad \|u - u_0\| \leqslant r\colon \|f(u) - l\| \leqslant \varepsilon]$$

**Définition :** Si, de plus, $u_0 \in A$, $f$ est continue en $u_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$.

En fait, on se retrouve avec $q$ applications « composantes » de $p$ variables réelles.

**Théorème :** $l = (l_1,l_2,\ldots,l_q)$ et $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_q(u))$

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{u\to u_0} f_1(u) = l_1 \\ \lim\limits_{u\to u_0} f_2(u) = l_2 \\ \vdots \\ \lim\limits_{u\to u_0} f_q(u) = l_q \end{cases}$$

**Corollaire :** $f$ est continue en $u_0 \in A \Leftrightarrow f_1,f_2,\ldots,f_q$ sont continue en $u_0$.

On retiendra encore l'idée que tout se passe composante par composante.
**Démonstration :** La démonstration est la même que la démonstration pré cédente en remplaçant, où il le faut, des valeurs absolues par des normes (ou des distances). ∎

### 5-2 Image d'une suite convergente de vecteurs de $A$, de limite $u_0$, par $f$ continue en $u_0$

**Théorème :** Soit $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^q)$, $A \subset \mathbb{R}^p$, $A$ non vide. Soit $u_0 \in A$, $f$ continue en $u_0$.
Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $A$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} v_m = u_0$.
Alors $\lim\limits_{m\to+\infty} f(v_m) = f(u_0)$.

**Démonstration :** Il suffit d'appliquer le critère séquentiel à chaque fonction composante $f_i$. ∎

### 5-3 Composée d'applications continues

**Théorème :** Soit $f \in \mathcal{A}(A,\mathbb{R}^p)$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $A$ non vide.
Soit $u_0 \in A$, $f$ continue en $u_0$.
Soit $g \in \mathcal{A}(B,\mathbb{R}^q)$, $B \subset \mathbb{R}^p$, $f(A) \subset B$, $g$ continue en $f(u_0)$.
On a ainsi : $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$
Ce qui donne :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue en } u_0 \\ g \text{ continue en } f(u_0) \end{array}\right\} : g \circ f \text{ est continue en } u_0.$$

**Démonstration :** On écrit les deux relations de continuité.

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in A, \quad \|u - u_0\| \leqslant r : \|f(u) - f(u_0)\| \leqslant \varepsilon \\ \forall \varepsilon' > 0, \quad \exists r' > 0, \quad \forall v \in B, \quad \|v - v_0\| \leqslant r' : \|g(v) - g(v_0)\| \leqslant \varepsilon' \end{array}$$

On prend $\varepsilon' > 0$, d'où $r' > 0$, on prend $\varepsilon = r'$, d'où $r > 0$, et
pour $u \in A$,

$$\|u - u_0\| \leqslant r : \|f(u) - f(u_0)\| \leqslant \varepsilon = r' : \|g(f(u)) - g(f(u_0))\| \leqslant \varepsilon'$$

et enfin

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in A, \quad \|u - u_0\| \leqslant r : \|g(f(u)) - g(f(u_0))\| \leqslant \varepsilon'.$$

■

On a maintenant les outils pour montrer facilement la continuité de la plupart des fonctions usuelles.

## 6 Compléments

### 6-1 Avec Maple

C'est « `limit` » qui permet d'obtenir les limites d'une expression. Il faut signaler la variable et le « point » considéré. Par exemple :

```
> limit(p,x=1);
> limit(p,x=1,right);
> limit(u,n=infinity);
```

On rappelle également la norme donnée dans le chapitre précédent.
`> norm(U,2);` calcule la norme usuelle, dite aussi norme euclidienne ou norme quadratique, c'est à dire la racine carrée de la somme des carrés des coordonnées, d'où le « `2` ».
Dans nos exemples, on a donné $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ que Maple connait également :

```
> norm(U,1);
> norm(U,infinity);
```

### 6-2 Les mathématiciens du chapitre

**Leibniz Gottfried 1646-1716** Allemand, philosophe et mathématicien « considérable » ! Ce fut aussi un grand pédagogue, on lui doit de nombreuses notations comme $\dfrac{dy}{dx}$ ou $\displaystyle\int$ Il est le premier à utiliser la notion de fonction...

**Cauchy Augustin-Louis 1789-1857** Très grand mathématicien français qui donnera une définition rigoureuse de la continuitÚ et de l'intégrale.

**Fréchet Maurice 1878-1973** Sans doute, ce parisien est le précurseur d'une étude rigoureuse de la continuité (...) des fonctions de plusieurs variables.