المتتاليات

I- المتتاليات: تعاريف و خاصيات

1- تعريف

ليكن I جزء من $\mathbb{N}$
المتتالية العددية هي تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$

اصطلاحات

-* $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\in I}$ عوض u.

$\{u_n / n \in I\}$ هي مجموعة قيم المتتالية $(u_n)_{n\in I}$.

-* اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n)

- ❖ اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 1}$
- ❖ اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$

2- المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $u_n \leq M \quad \forall n \in I$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $u_n \geq m \quad \forall n \in I$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \quad |u_n| \leq k \quad \forall n \in I \quad \exists k \in \mathbb{R}_+^*$

رتابة متتالية

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in I$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in I$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in I$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} < u_n \quad \forall n \in I$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \quad u_{n+1} = u_n \quad \forall n \in I$

3- المتتالية الحسابية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $u_{n+1} = u_n + r \quad \forall n \geq n_0$

العدد r يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا وفقط اذا كان $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \quad \forall n > n_0$

صيغة الحد العام

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r \quad \forall n\geq n_0$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_0 + nr \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_1 + (n-1)r \quad \forall n\geq 1$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_p + (n-p)r \quad \forall n\geq p\geq n_0$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1}\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ فان $S_n = \dfrac{(n-p)(u_p+u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = \frac{n(u_0+u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$$

4- المتتالية الهندسية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n\geq n_0$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا وفقط اذا كان $u_n^2 = u_{n+1}\cdot u_{n-1} \quad \forall n\succ n_0$

صيغة الحد العام

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_{n_0}q^{n-n_0} \quad \forall n\geq n_0$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_0q^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_1q^{n-1} \quad \forall n\geq 1$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_pq^{n-p} \quad \forall n\geq p\geq n_0$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1}\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 .... + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 .... + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

اذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1} = u_p(n-p)$

نهايات المتتاليات

II- نهايات المتتاليات

1- تعاريف

$$\lim u_n = +\infty \iff \forall A \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \succ A$$

$$\lim u_n = -\infty \iff \forall A \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \prec -A$$

$$\lim u_n = l \iff \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \prec \varepsilon$$

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.
نقول إن متتالية متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

2- مصادق التقارب

مصداق1 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

l عدد حقيقي حيث $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$.

اذا كان $\lim v_n = 0$ فان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

مصداق2 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_n \leq v_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$

اذا كان $\lim u_n = +\infty$ فان $\lim v_n = +\infty$

اذا كان $\lim v_n = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

لازمة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ ثلاث متتاليات حيث

$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$

اذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فان $\lim u_n = l$

3- نهاية q^n

خاصية

اذا كان $q \succ 1$ فان $\lim q^n = +\infty$

اذا كان $q = 1$ فان $\lim q^n = 1$

اذا كان $-1 \prec q \prec 1$ فان $\lim q^n = 0$

اذا كان $q \leq -1$ فان (q^n) ليست لها نهاية

ملاحظة

*- المتتالية (q^n) متقاربة اذا كان $-1 \prec q \leq 1$

*- ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان $r \succ 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r \prec 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = 0$

4- خاصيات

خاصية

كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

مبرهنة

كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

5- متتاليات من نوع $f(u_n)$

خاصية

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و N من $\mathbb{N}$
حيث $u_n \in I \quad \forall n \geq N$ و f متصلة على I و $f(I) \subset I$.
اذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها هي حل للمعادلة $f(l) = l$

تمرين

نعتبر (u_n) متالية حيث $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{2}$

بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها