

1- الاشتقاق في نقطة - الدالة المشتقة  
(A) أنشطة

نشاط 1

باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0$  و حدد العدد المشتق في  $x_0$  إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الأضلاع  $x_0$  في الحالات التالية

أ-  $f(x) = x^2 - 2x$   $x_0 = 1$  ب-  $f(x) = x^2 - 4$   $x_0 = 2$  ج-  $x_0 = 0$   $\begin{cases} f(x) = \sin x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - 2x & x > 0 \end{cases}$

نشاط 2

حدد الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  بعد تحديد مجموعة تعريف كل من  $f$  و  $f'$  في الحالات التالية

أ-  $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$  ب-  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$  ج-  $f(x) = \sin 2x \cos x$  د-  $f(x) = 1 + \tan^2 x$  س-  $f(x) = x^2 - x$

نشاط 3

حدد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \cos \pi x}{x-1}$   $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

(B) تذكير  
1- الاشتقاق في نقطة  
أ- تعريف

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه  $x_0$

نقول إن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  نهاية  $l$  في  $x_0$  ونرمز لها

ب-  $f'(x_0)$ . العدد  $l$  يسمى العدد المشتق ل  $f$  في  $x_0$ . نكتب  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في  $x_0$  تكون متصلة في  $x_0$

2- الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار  
أ- تعريف

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $[x_0; x_0 + \alpha]$  حيث  $\alpha > 0$   
نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  نهاية  $l$  على اليمين في  $x_0$  ونرمز لها ب-  $f'_d(x_0)$ .

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق ل  $f$  على اليمين في  $x_0$  نكتب  $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من شكل  $]x_x - \alpha; x_0]$  حيث  $\alpha > 0$   
نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في  $x_0$  إذا كانت للدالة  $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  نهاية  $l$  على اليسار في  $x_0$  ونرمز لها ب  $f'_g(x_0)$ .

العدد  $l$  يسمى العدد المشتق ل  $f$  على اليسار في  $x_0$  نكتب  $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

**ب - خاصة**

تكون  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في  $x_0$  والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

**3- التاويل الهندسي - معادلة المماس لمنحني دالة**

**أ- المماس**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  و  $C_r$  منحناها قابلة اشتقاق  $f$  في  $x_0$  تؤول هندسيا بوجود مماس لـ  $C_r$  عند النقطة ذات الأضول  $x_0$  معادلته  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**ب- نصف المماس**

إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في  $x_0$  (أو على اليسار في  $x_0$ ) فإن  $C_r$  يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأضول  $x_0$  معامله الموجه  $f'_g(x_0)$  (أو  $f'_d(x_0)$ )

**ج- نصف مماس مواز لمحور الأرتاب**

إذا كانت  $f$  متصلة في  $x_0$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$  فإن  $C_r$  لـ نصف مماس مواز لمحور الأرتاب.

**4- الدالة المشتقة**

**أ- تعريف**

نقول إن  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة من  $I$ . الدالة التي تربط كل عنصر  $x$  من  $I$  بالعدد  $f'(x)$  تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ  $f'$ .

**ب- عمليات على الدوال المشتقة**

\*- لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال  $I$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

\*- لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

- لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $n \in \mathbb{Z}_-$  و  $f$  لا تنعدم على  $I$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

**أ- مشتقة دالة مركبة - مشتقة الدالة العكسية**

**1- مشتقة دالة مركبة**

**خاصة**

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $g$  قابلة للاشتقاق على  $f(I)$  إذا كان  $x_0$  عنصرا من  $I$  و كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $g$  قابلة للاشتقاق في  $f(x_0)$  فإن  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$ .

**خاصة**

لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $g$  قابلة للاشتقاق على  $f(I)$

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

**نصين** أحسب  $f'(x)$  بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة  $f'$  في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad (b) ; \quad f(x) = \cos(x^3 - 4x^2) \quad (a)$$

### 2- مشتقة الدالة العكسية خاصية

تكن  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$   
إذا كان  $x_0$  عنصراً من  $I$  وكانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و  $f'(x_0) \neq 0$  فإن الدالة  $f^{-1}$  للاشتقاق في

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{و} \quad f(x_0)$$

### خاصية

تكن  $f$  دالة رتبية قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $f'$  لا تنعدم على  $I$

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### 3- تطبيقات

#### 1- مشتقة دالة الجذر من الرتبة $n$

### خاصية

\* ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$ . الدالة  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  و لدينا  $(\sqrt[n]{x})' = \left( (x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

\* ليكن  $r$  من  $\mathbb{Q}^*$ . الدالة  $x \rightarrow x^r$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  و لدينا  $(x^r)' = r x^{r-1}$

### خاصية

إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $f$  موجبة قطعاً على  $I$  و  $n \in \mathbb{N}^*$  فإن الدالة  $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$ .

$$\forall x \in I \quad (\sqrt[n]{f(x)})' = \left( (f(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} (f(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x)$$

### نتيجة

تكن  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $f$  موجبة قطعاً على  $I$  و  $r \in \mathbb{Q}$ .

$$\forall x \in I \quad \left( (f(x))^r \right)' = r (f(x))^{r-1} \cdot f'(x)$$

**تمرين:** أحسب الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  بعد تحديد  $D_f$  و  $D_{f'}$  في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{5}} - 3 \quad f(x) = \sqrt[3]{x-3} - 2 \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2} - 1$$

$$f(x) = -2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{2}} - 5 \quad f(x) = \left( (x^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{5}} - 4$$

### ب- مشتقة الدوال العكسية للدوال المتثلثة

الدالة  $\arctan$  هي الدالة العكسية للدالة  $f$  المعرفة من  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  نحو  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \tan x$

بما أن  $f$  قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  فإن الدالة  $\arctan$  قابلة

$$\text{للاشتقاق على } \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \arctan' x = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

### خاصية

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan' x = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{و} \quad \arctan \text{ دالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

**خاصية**

\* إذا كانت الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $I$  فإن الدالة  $\arctan \circ u$  قابلة للاشتقاق على  $I$

$$\forall x \in I \quad (\arctan \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2} \text{ و}$$

**تمرين** أحسب مشتقة  $f$  بعد تحديد حيز تعريفها في الحالات

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x} \quad f(x) = \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

**تمرين** حدد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{x}$

**جدول مشتقات بعض الدوال**

$D_f$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	$a$
$\mathbb{R}$	1	$x$
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
$\mathbb{R}^*$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\{x \in D_u, / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{x^n}$
$\mathbb{R}_+^*$	$rx^{r-1}$	$r \in \mathbb{Q} \quad x^r$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$D_u$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$	$\arctan(u(x))$

**III- الدوال الأصلية**

**تعريف**

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$ . نقول إن دالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  إذا كانت  $F$  قابلة

للاشتقاق على  $I$  وكان  $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

**أمثلة** الدالة  $F: x \rightarrow x^2 + 2x$  دالة أصلية للدالة  $f: x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$  على  $\mathbb{R}$

الدالة  $F: x \rightarrow \cos x + 3$  دالة أصلية للدالة  $f: x \rightarrow -\sin x$  على  $\mathbb{R}$

**خاصية**

لتكن  $f$  دالة عددية تقبل دالة أصلية  $F$  على مجال  $I$   
مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  هي المجموعة المكونة من الدوال  $F + \lambda$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**أمثلة** - الدالة  $F: x \rightarrow x^2 + 2x$  دالة أصلية للدالة  $f: x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$  على  $\mathbb{R}$

إذن الدوال الأصلية لـ  $f$  هي الدوال  $F_\lambda$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $F_\lambda(x) = x^2 + 2x + \lambda$

**خاصية**

لتكن  $f$  دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال  $I$  ليكن  $x_0$  من  $I$  و  $y_0$  من  $\mathbb{R}$   
توجد دالة أصلية وحيدة  $G$  للدالة  $f$  على مجال  $I$  بحيث  $G(x_0) = y_0$ .

**مثال** نحدد دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x^3 - 2x + 3$  التي تأخذ القيمة 2 عند 1

**خاصية**

إذا كانت  $F$  و  $G$  دالتين أصليتين للدالتين  $f$  و  $g$  على مجال  $I$  على التوالي وكان  $\lambda \in \mathbb{R}$  فإن

$F + G$  دالة أصلية لـ  $f + g$

$\lambda F$  دالة أصلية لـ  $\lambda f$

**خاصية**

كل دالة متصلة على مجال  $I$  تقبل دالة أصلية على  $I$

**مثال**

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 & x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & x < 2 \end{cases}$$

بين أن  $f$  تقبل دالة أصلية على  $\mathbb{R}$  و حدد الدوال الأصلية لـ  $f$ .

**تمارين**

1- حدد دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$   $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

(لاحظ أن  $f(x) = au'(x)(u(x))^n$  حيث  $\alpha$  و  $n$  معلومين)

2- حدد دوال أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$   $f(x) = \frac{3}{4x^2 + 4x + 2}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على  $f(x) = \alpha \frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$ )

3- حدد دوال أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$   $f(x) = \cos^3 x$

(يتم احتساب  $f(x)$  بوضع  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ )