I- دالة اللوغاريتم النبيري

1- تذكير - نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I

- نعلم أن لكل r من $\mathbb{Q}-\{-1\}$ الدالة $x\to x^r$ تقبل دوال أصلية على $]0;+\infty[$ هي $x\to\frac{x^{r+1}}{r+1}+k$

حيث k عدد حقيقي ثابت

*- في الحالة التي تكون r=-1 نحصل على الدالة $x\to\frac{1}{x}$ المتصلة على $]0;+\infty[$ ومنه تقبل دوال أصلية

وبالتالي الدالة $x\to\frac{1}{x}$ تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1.

2- تعريف

الدالة الأصلية لدالة $x\to\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري

و يرمز لها بالرمز ln أو Log

$$\begin{cases} x\succ 0 \\ f'(x)=\frac{1}{x} \\ f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\ln(x)$$

3- خاصيات

أ- خاصيات

*- مجموعة تعريف الدالة ln هي $]0;+\infty[$ $\ln(1)=0$

*- الدالة ln متصلة على $]0;+\infty[$

*- الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x\in]0;+\infty[$

*- الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

نتائج

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y

$$\ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$$
$$\ln x\succ\ln y\Leftrightarrow x\succ y$$

ملاحظة

$$\ln x=0\Leftrightarrow x=1$$
$$\ln x\succ 0\Leftrightarrow x\succ 1$$
$$\ln x\prec 0\Leftrightarrow 0\prec x\prec 1$$

تمرين 1- حدد مجموعة تعريف الدالتين $f:x\to\ln(x-1)+\ln(4-x)$ $\quad g:x\to\ln(x^2-3x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $\ln(x^2+2x)=0$ $\quad \ln(x^2-3)=\ln(2x)$

3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $\ln(x^2-x-2)\prec 0$ $\quad \ln(x^2-2x)\le\ln(x)$

ب- خاصية أساسية

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b \qquad \forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2$$

البرهان ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا

نعتبر الدالة $F : x \to \ln(ax)$

لدينا $F'(x) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0;+\infty[$ ومنه F دالة أصلية لدالة $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

اذن $F(x) = k + \ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$

$x = 1 \Rightarrow F(1) = \ln(a)$; $F(1) = k \Rightarrow k = \ln a$

$F(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$

بوضع $x = b$ نحصل على $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

ج- خاصيات

*- $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$

*- $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ $\forall (x;y) \in]0;+\infty[^2$

*- $\ln(x_1 \times x_2 \times ....\times x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n$ $\forall (x_1;x_2;....;x_n) \in]0;+\infty[^n$

*- $\ln x^r = r\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$ $\forall r \in \mathbb{Q}^*$

البرهان

❖ $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln x + \ln\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x} = -\ln x$

❖ إذا كان $r \in \mathbb{N}^*$ فان $\ln x^r = \ln(\underbrace{x \times x \times ....\times x}_{r \quad facteurs}) = \underbrace{\ln x + \ln x + ...+ \ln x}_{r \quad termes} = r\ln x$

إذا كان $r \in \mathbb{Z}^*_-$ فإننا نضع $r = -n$ ومنه $\ln x^r = \ln x^{-n} = \ln\frac{1}{x^n} = -\ln x^n = -n\ln x = r\ln x$

إذا كان $\frac{p}{q} = r$ / $p \in \mathbb{Z}^*$ $q \in \mathbb{N}^*$ نعلم أن $y = x^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow x^p = y^q$

و منه $\ln x^p = \ln y^q$ و بالتالي $p\ln x = q\ln y$ أي $\ln y = \frac{p}{q}\ln x$ اذن

$\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\ln x$ أي $\ln x^r = r\ln x$

حالة خاصة $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$

تمرين هل الدالتان f و g متساويتين في الحالتين التاليتين

a) $g(x) = 2\ln|x-1|$ $f(x) = \ln(x-1)^2$

b) $g(x) = \ln x + \ln(x-1)$ $f(x) = \ln x(x-1)$

تمرين 1) أحسب $\ln\sqrt{\sqrt{2}+1} + \ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$

2) أحسب قيمة مقربة لـ $\ln\sqrt{6}$ و $\ln\frac{2}{9}$ اذا علمت أن $\ln 3 \simeq 1{,}1$ $\ln 2 \simeq 0{,}7$

4- دراسة دالة ln

a) دالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

b) مبرهنة1 (نقبل) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة2 $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

البرهان نضع $x = \frac{1}{t}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} -\ln t = -\infty$

c) العدد e

لدينا الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ و منه الدالة ln تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$

و بالتالي المعادلة $\ln x = 1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذن $\ln e = 1$

نقبل أن e ليس عددا جذريا و قيمته المقربة هي $e \simeq 2,71828$

d) جدول تغيرات الدالة ln

x	0	1	e	+∞
f	−∞ ↗	0	1	+∞

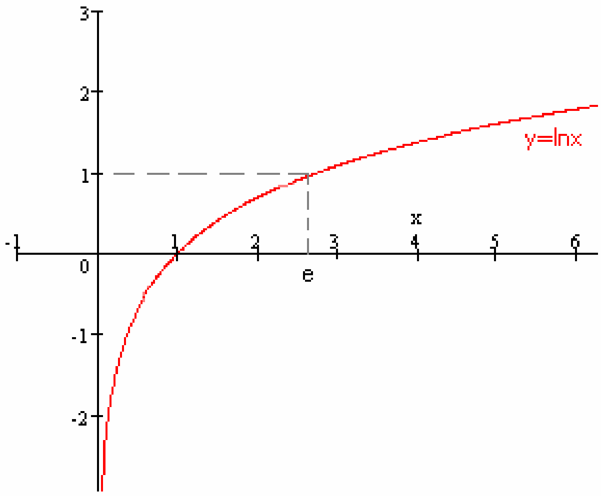
e) الفروع اللانهائية بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ فان محور الاراتيب مقارب للمنحنى الممثل الدالة ln

مبرهنة $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

اذن المنحنى الممثل لدالة ln يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

f) دراسة التقعر $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن منحنى الدالة ln مقعر

g) التمثيل المبياني



h) نهايات هامة أخرى
خاصية

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

تمرين حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} x\ln(x^2 - x)$

5 – مشتقة الدالة اللوغاريتمية

أ- مبرهنة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال I

$$\forall x \in I \qquad \left(\ln\left|u(x)\right|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان u لاتنعدم علىI و منه u إما موجبة قطعا على I أو سالبة قطعا على I

اذا كانت u موجبة قطعا على I فان $f(x)=\ln u(x)$ ومنه

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = u'(x)\ln' u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

اذا كانت u سالبة قطعا على I فان $f(x)=\ln(-u(x))$ ومنه

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = -u'(x)\ln'(-u(x)) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

تمرين حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب مشتقتها في الحالتين التاليتين

$f(x)=\ln\left|x^2-4\right|$ (a $\qquad f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)$ (b

ب- تعريف

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

ج- نتيجة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدوال الأصلية لدالة $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال $x \to \ln\left|u(x)\right| + c$ حيث c عدد ثابت

تمرين1 أوجد دالة أصلية لدالة f على المجال I في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x} \\ I = \left]2;+\infty\right[\end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \tan(x) \\ I = \left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \\ I = \left]-1;+\infty\right[\end{cases}$$

تمرين2 أحسب الدالة المشتقة لدالة f على $\left]-1;+\infty\right[$ حيث $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{(x+2)^2}$

II- دالة اللوغاريتم للأساس a

1- تعريف

a عدد حقيقي موجب قطعا و مخالف للعدد 1

الدالة $x \to \frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز Log_a

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\qquad Log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

ملاحظات

*- دالة اللوغاريتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[\qquad Log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

*- $Log_a\left(a^r\right)=r \qquad Log_a(a)=1 \qquad \forall r \in \mathbb{Q} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

2- خاصيات

بما أن لكل x من $\left]0;+\infty\right[$ $Log_a(x)=k\ln x$ حيث k عدد حقيقي ثابت فان الدالة Log_a تحقق جميع الخاصيات التي تحققها الدالة $\ln$

$$\forall (x;y) \in (]0;+\infty[)^2 \qquad \forall r \in \mathbb{Q} \qquad Log_a(xy) = Log_a(x) + Log_a(y)$$

$$Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a(x) - Log_a(y) \quad ; \quad Log_a(x^r) = rLog_a(x)$$

3- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad Log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

-* اذا كان $0 \prec a \prec 1$ فان $\ln a \prec 0$ و منه $Log_a' \prec 0$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن Log_a تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

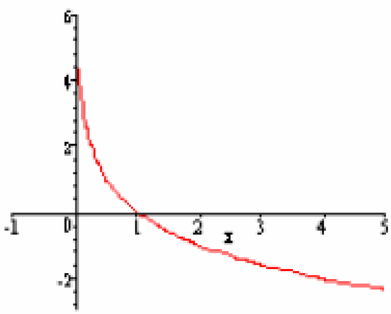
$$\lim_{x \to 0^+} Log_a x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} Log_a x = -\infty$$

-* اذا كان $a \succ 1$ فان $\ln a \succ 0$ و منه $Log_a' \succ 0$ $\forall x \in]0;+\infty[$ اذن Log_a تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} Log_a x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} Log_a x = +\infty$$

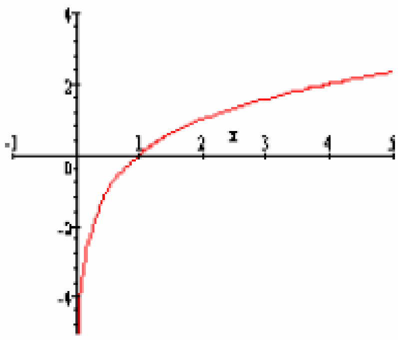
الحالة $0 \prec a \prec 1$

التمثيل المبياني $a = \frac{1}{2}$



الحالة $a \succ 1$

التمثيل المبياني $a = 2$



4- حالة خاصة اللوغاريتم العشري

تعريف

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها بـ log

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \log x = Log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

*- اذا وضعنا $M = \dfrac{1}{\ln 10}$ فاننا نحصل على

$$\log x = M \ln x \qquad \forall x \in]0;+\infty[\qquad (M \simeq 0,434)$$

*- $\log 10^m = m \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$

تمرين 1- أحسب $\log 10000$ $\log 0,01$

2- حل في $\mathbb{R}$ $\log(x-1)+\log(x+3)=2$

3- حل في $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$