

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u, z, f, \dots)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة , كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

(أ) إذا $y' = 0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على \mathbb{R} بـ $y(x) = 1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R} هي الحل العام للمعادلة $y' = 0$.

(ب) $y' = x^2 - 1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x) = x^2 - 1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x \rightarrow x^2 - 1$ على \mathbb{R} .

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $x \rightarrow \frac{1}{3}x^3 - x + k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II - حل المعادلة التفاضلية $y' + ay = 0$

1- المعادلة التفاضلية $y' + ay = 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى (لأنها لا تتضمن إلا المشتقة الأولى للمجهول y) ذات المعاملات الثابتة .

* إذا كان $a = 0$ فإن $y' = 0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R}
* إذا كان $a \neq 0$

نعلم أن $(e^{-ax})' = -ae^{-ax}$ و $\forall x \in \mathbb{R}$ إذن $x \rightarrow e^{-ax}$ حل خاص للمعادلة $y' + ay = 0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y' + ay = 0$ نضع $y(x) = z(x)e^{-ax}$

ومنه $y'(x) = z'(x)e^{-ax} - az(x)e^{-ax}$

أي $y'(x) + ay(x) = z'(x)e^{-ax} - az(x)e^{-ax} + ay(x) = z'(x)e^{-ax} = 0$ و بالتالي $y'(x) = z'(x)e^{-ax} - ay(x)$

ومنه $z'(x) = 0$ و بالتالي $z(x) = \lambda$ حيث $\forall x \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي اعتباطي

إذن $y(x) = \lambda e^{-ax}$ حيث $\forall x \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a = 0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y' + ay = 0$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{-ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' + ay = 0$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \rightarrow y_0 e^{-a(x-x_0)}$

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y = 0$

2- حل المعادلة التفاضلية $-y' + \frac{1}{3}y = 0$; $y(1) = 2$

2- حل المعادلة التفاضلية من نوع $y' + ay^2 = 0$

تمهين تعتبر المعادلة $(E): y' + 3y^2 = 0$

أوجد الحل المعرف على $[1; +\infty[$ حيث $y(2) = \frac{1}{4}$ ولا ينعدم على $[1; +\infty[$

الحل

$$y' + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-y'}{y^2} = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 3x + k \quad / k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3x + k}$$

بما أن $y(2) = \frac{1}{4}$ فإن $k = -2$ اذن $y(x) = \frac{1}{3x - 2}$ $\forall x \in [1; +\infty[$ ($3x - 2 \neq 0$)

III- حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

1- المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- إذا كان $a = b = 0$ فإن $y'' = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \rightarrow kx + k'$ بحيث $(k; k') \in \mathbb{R}^2$

*- إذا كان $b = 0$ فإن $y'' + ay' = 0$

$$z' + az = 0 \text{ حل للمعادلة } y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$$

و بالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية $x \rightarrow \lambda e^{-ax}$

$$\text{أي الدوال} \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu$$

3- حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \neq (0; 0)$

(a)- تذكير لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I

تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

(b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E وليكن $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $E: y'' + ay' + by = 0$ و كان $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ فإن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E .

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = 0$ هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E .

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = 0$ يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

(d)- حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y: x \rightarrow e^{rx}$ $r \in \mathbb{R}$;

$$y \text{ حل للمعادلة } E \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0 \Leftrightarrow r^2 e^x + ar e^x + be^x = 0$$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية
 $(a; b) \in \mathbb{R}^2$; $E : y'' + ay' + by = 0$

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

الحالة 1 إذا كان $a^2 - 4b > 0$ فإن $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحالة 2 إذا كان $a^2 - 4b = 0$ فإن $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \rightarrow x e^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \rightarrow e^{rx}$ و $x \rightarrow x e^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \rightarrow x \frac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

الحالة 3 إذا كان $a^2 - 4b < 0$ فإن $r^2 + ar + b = 0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

($q \neq 0$)

$$e^{r_1 x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx) = e^{px} \cos qx + i e^{px} \sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos x$; $x \rightarrow e^{px} \sin x$ حلين للمعادلة E.

$$\text{لاحظ} \left(p = -\frac{a}{2} ; q = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \right)$$

و بما أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos x$; $x \rightarrow e^{px} \sin x$ غير متناسبتين فإن حلول المعادلة التفاضلية

E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$; $E : y'' + ay' + by = 0$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة

*- إذا كان $a^2 - 4b > 0$ فإن المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين r_1 ; r_2

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- إذا كان $a^2 - 4b = 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- إذا كان $a^2 - 4b < 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$

الشرطان $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة لدينا

$$\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left(\frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k (\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos(qx - \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{k} ; \sin \varphi = \frac{\beta}{k} ; k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ بوضع}$$

تستنتج إذا كان $a^2 - 4b < 0$ فإن $ke^{px} \cos(qx - \varphi)$ حيث x و k و φ اعتباريان

تمرين 1 - حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1 ; y_1'(0) = -1$

-2 حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$ حيث $y(-1) = 1 ; y'(-1) = 0$

-3 حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$ حيث $y(0) = 0 ; y'(0) = -1$

حالات خاصة

*- إذا كان $a > 0$ فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما

$$\text{يلي } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ حيث } x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{ax} + \beta \sin \sqrt{ax}.$$

*- إذا كان $a < 0$ فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما

$$\text{يلي } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ حيث } x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-ax}} + \beta e^{-\sqrt{-ax}}$$

مثال حل المعادلتين $y'' + 2y = 0 ; y'' - 4y = 0$

IV- معادلات تفاضلية بطرف ثان

-1 معادلة تفاضلية $y' + ay = f(x)$

أ- تعريف

المعادلة التفاضلية $E: y' + ay = f(x)$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة و بطرف ثان.

المعادلة التفاضلية $E': y' + ay = 0$ تسمى المعادلة التفاضلية المرتبطة بالمعادلة التفاضلية E

ب- حل معادلة تفاضلية $E: y' + ay = f(x)$

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة E و y_1 حلا عاما للمعادلة E

$$\text{ومنه } y_0' + ay_0 = f(x) ; y_1' + ay_1 = f(x) \text{ اذن } (y_1 - y_0)' + a(y_1 - y_0) = 0$$

و بالتالي $y_1 - y_0$ هو z الحل العام للمعادلة $E': z' + az = 0$

$$\text{اذن } y_1 = z + y_0$$

خاصية

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة $E: y' + ay = f(x)$ و z حلا عاما للمعادلة $E': y' + ay = 0$

الحل العام للمعادلة E هو $y = z + y_0$

-2 معادلة تفاضلية $y'' + ay' + by = f(x)$

أ- تعريف

المعادلة التفاضلية $E: y'' + ay' + by = f(x)$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات

معاملات ثابتة و بطرف ثان

المعادلة التفاضلية $E': y'' + ay' + by = 0$ تسمى المعادلة التفاضلية المرتبطة بالمعادلة

التفاضلية E .

ب- حل معادلة تفاضلية $E: y'' + ay' + by = f(x)$

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة E و y_1 حلا عاما للمعادلة E

$$\text{ومنه } y_0'' + ay_0' + by_0 = f(x) ; y_1'' + ay_1' + by_1 = f(x)$$

$$\text{اذن } (y_1 - y_0)'' + a(y_1 - y_0)' + b(y_1 - y_0) = 0$$

و بالتالي $y_1 - y_0$ هو z الحل العام للمعادلة $E': z'' + az' + bz = 0$ اذن $y_1 = z + y_0$

خاصية

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة $E : y'' + ay' + by = f(x)$ و z حلا عاما للمعادلة
 $E' : y'' + ay' + by = 0$.
الحل العام للمعادلة E هو $y = z + y_0$

3- تقنيات

(a)*- لحل المعادلة التفاضلية $y' + ay = p(x)$ حيث p دالة حدودية

نبحث عن حل خاص للمعادلة $y' + ay = p(x)$

- إذا كان $a \neq 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها n
- إذا كان $a = 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها $n+1$

ونطبق الخاصية

مثال حل $y' + 2y = x^2 - x$

(*)- لحل المعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = p(x)$ حيث p دالة حدودية درجتها n

نبحث عن حل خاص للمعادلة

- إذا كان $c \neq 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها n
- إذا كان $c = 0$ و $b \neq 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها $n+1$
- إذا كان $c = 0$ و $b = 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها $n+2$

ونطبق الخاصية.

مثال حل $y'' + 3y' + 2y = x^2 + x$

(b)*- لحل المعادلة التفاضلية $y' + ay = k \cos(\omega x - \varphi)$

نبحث عن حل خاص للمعادلة $y' + ay = k \cos(\omega x - \varphi)$ من نوع $x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ و نطبق الخاصية

مثال حل $y' + 2y = 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

(*)- لحل المعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = k \cos(\omega x - \varphi)$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ و نطبق الخاصية

مثال حل للمعادلة $y'' + 6y' + 5y = 3 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

(c)*- لحل المعادلة التفاضلية $E : y' + ay = k e^{\alpha x}$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x \rightarrow (ax + b)e^{\alpha x}$ و نطبق الخاصية

مثال حل $y' + 2y = 4e^x$ و $y' + 2y = 4e^{-2x}$

(*)- لحل المعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = k e^{\alpha x}$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x \rightarrow (ax^2 + bx + c)e^{\alpha x}$ و نطبق الخاصية

مثال حل المعادلتين $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$; $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$