Applications linéaires et espaces vectoriels quotients

1 Introduction

Les applications linéaires sont parmi les plus importantes en mathématiques. Elles interviennent dans de nombreuses situations. En analyse, elles servent par exemple à approximer localement des fonctions ou des équations différentielles. En algèbre, on peut les utiliser pour représenter des équations. En géométrie, elles modélisent les symétries d'un objet...
Nous étudierons dans cette leçon leurs principales propriétés. Nous verrons que ces dernières sont nombreuses et justifient l'intérêt qui leur est porté. Nous terminerons cette partie par une intrusion dans le monde des espaces vectoriels quotients. L'importance de ces derniers est liée en particulier au fait que pour un sous espace donné dans un espace vectoriel il n'existe pas de supplémentaire cannonique. Nous verrons que les espaces quotients permettent de définir pour un sous espace vectoriel donné un supplémentaire bien particulier.
Dans tout ce chapitre k désigne un corps.

2 Définitions

Définition Soient E et F des k-espaces vectoriels et f une application de E dans F. f est **une application k-linéaire** si pour tout x et y dans E et tout α et β dans k, $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$.
On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On utilisera, quand aucune confusion n'est à craindre, le mot "linéaire" à la place de "k-linéaire".

Définition Si f est une application linéaire du k espace vectoriel E dans le k espace vectoriel F alors:

- Si E=F f est un **endomorphisme**. L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E sera noté $\mathcal{L}(E)$.
- Si f est bijective f est un **isomorphisme**.
- Si E=F et que f est bijective alors f est un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel sera noté GL(E) (**Groupe linéaire de E**).

L'utilisation du mot groupe dans la définition précédente sera justifiée plus loin.

Définition Deux espaces vectoriels sont **isomorphes** si il existe un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.

L'importance des isomorphismes entre les espaces vectoriels est la même que celle des isomorphismes en théorie des groupes ou que celle des homéomorphismes entre espaces topologiques. Des espaces vectoriels isomorphes auront les mêmes propriétés "vectorielles". Cette notion permettra de classer les espaces vectoriels. Toute propriété "vectorielle" vraie pour un espace vectoriel donné sera vraie pour un espace vectoriel qui lui est isomorphe.

Proposition "Etre isomorphe à" est une relation d"équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels sur un corps k.

Démonstration C'est facile.

Définition Soit E un k-espace vectoriel. L'application qui à un vecteur x de E associe lui même est appelée **application identique sur E** ou **Identité de E**. On la note Id_E (ou Id quand aucune confusion n'est à craindre): $\forall$ x $\in$ E, Id_E(x)=x. On vérifie immédiatement que cette application est linéaire.

3 Propriétés

Proposition Soient E et F des k-espaces vectoriels. Soit E' un sous espace vectoriel de E et soit f une application linéaire de E dans F. Alors f(E') est un sous espace vectoriel de F. Le sous espace vectoriel de F image de E par f est noté Im f.

Démonstration Soient y,y'$\in f$(E'). Il existe donc x,x'$\in$E tels que y=f(x) et y'=f(x'). Soient $\alpha,\alpha' \in$k.Il suffit de vérifier que αy+α'y' est élément de f(E'). Mais αy+α'y'= αf(x)+$\alpha' f$(x') =f(αx+α'x').

Définition Soient E et F deux k-espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. Le sous ensemble de E des vecteurs annulant f est appelé **noyau de** f et est noté Ker f.

$$Ker f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0\}$$

Proposition Le noyau d'un application linéaire est un sous espace vectoriel de l'espace de départ de l'application linéaire.

Démonstration Soit f l'application linéaire considérée. Notons E l'espace vectoriel sur lequel f est définie. Soient aussi x,y$\in$Ker f, $\alpha,\beta \in$k. Il suffit là aussi de vérifier que αx+βy$\in$Ker f. Mais f(αx+βy)=αf(x)+βf(y)=0. Ker f est donc bien un sous espace vectoriel de E.

La propriété qui suit est extrêmement utile pour prouver l'injectivité d'une application linéaire.

Proposition Soient E et F deux k-espaces vectoriels. Soit f une application linéaire définie de E dans F. On a équivalence entre:

– Ker f=$\{0\}$.
– f est injective.

Démonstration Remarquons que E et F étant des espaces vectoriels, ce sont aussi des groupes pour leur loi interne respective et que f, application linéaire de E dans F, est aussi un homomorphisme entre ces deux groupes. Or on sait que dans ce cas préçis, l'injectivité de f est équivalente au fait que son noyau est réduit à l'élément neutre du groupe de départ.

Définition Soient E et F deux k-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Rappelons que Im f est un sous espace vectoriel de F. Si Im f est un sous espace vectoriel de dimension finie dans F alors on appelle **rang de l'aplication linéaire** f la dimension de Im f. On notera rg f le rang de f.

Proposition Soient E et F des k-espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit I un ensemble et A=$\{e_i; i \in I\}$ une famille de vecteurs de E indexés par I. Si A est une famille génératrice de E alors f(A)=$\{f(e_i); i \in I\}$ est une famille génératrice de Im f.

Démonstration Soit y∈Im f. Il existe x dans E tel que y=f(x). Mais la famille A est génératrice dans E. Donc il existe une famille $\{\lambda_i; i \in I\}$ de scalaires (à support finie) de k telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i.$$

Comme f est linéaire,

$$y = f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i).$$

y étant quelconque dans Im f, la propriété est démontrée.

Corollaire Si E et F sont deux k espaces vectoriels, que E est de dimension finie et que f est une application linéaire de E dans F alors f est de rang fini dans F.

Démonstration Comme E est de dimension finie, E possède une famille A génératrice et de cardinal fini. L'image de cette famille par f est une famille génératrice de Im f qui est encore de cardinal fini. Par définition d'un espace vectoriel de dimension finie, Im f est alors de dimension finie. Et le rang de f étant la dimension de Im f, f est bien de rang fini.

Proposition **Formule du rang** Si E et F sont des k-espaces vectoriels, que E est de dimension finie, et que f est une application linéaire de E dans F alors f vérifie: dim Ker f+rg f=dim E.

Démonstration E étant de dimension finie, on peut trouver une base de cardinal fini de Ker f. Posons n=dim E et p=dim Ker f. Soit $\{e_1,...,e_p\}$ une base de Ker f. Prenons un sous espace E' supplémentaire à Ker f. Cette base peut se complèter en une base $\{e_1,...,e_p,e_{p+1},...,e_n\}$ de E où les vecteurs $\{e_{p+1},...,e_n\}$ forment une base de ce supplémentaire. L'image de cette base par f est génératrice de Im f. Donc Im f=Vect(f(e_{p+1}),...,f(e_n)). Cette famille est, de plus, libre dans Im f: Si $\lambda_{p+1},...,\lambda_n$ sont n-p scalaires de k tels que $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$ alors $f(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i) = 0$. Mais ceci implique que $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ est élément de Ker f. Cette somme est une somme de vecteurs qui sont dans un sous espace supplémentaire E' de Ker f. La somme est donc élément de E'. $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$ est alors dans E'∩Ker f. La seule possibilité est $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Mais cette famille est libre dans E donc λ_i=0 pour tout i=p+1,...,n. Ces scalaires ayant été choisis de façon quelconque dans k, La famille {f(e_{p+1}),...f(e_n)} est libre dans Im f. C'est donc une base de Im f et dim Im f=n-p. Mais dim Im f=rg f. L'égalité n=(n-p)+p équivaut donc à dim E= rg f+dim Ker f.

Corollaire Si E et F sont deux espaces vectoriels tels que E est de dimension finie et que F est isomorphe à E alors F est aussi de dimension finie et dim E=dim F.

Démonstration Comme E et F sont isomorphes, il existe un isomorphisme f:E→F. f étant, par définition, une application bijective, elle est en particulier surjective et Im f=F. Mais Im f étant d'après la proposition précédente de dimension finie, il en est de même de F. On peut alors parler de la dimension de F. Cette dimension est égale à rg f. Mais comme f est aussi injective, Ker f={ 0 } et dim Ker f=0. La formule précédente appliquer au cas ici étudié donne rg f=dim E. Donc dim E= dim F. E et F ont même dimension.

Mais la réciproque de ce théorème est aussi vraie.

Proposition Si E et F sont deux k-espaces vectoriels de même dimension alors ils sont isomorphes.

Démonstration Soit n la dimension de E. Soit $(e_i)_{i=1,...,n}$ une base de E et soit $(f_i)_{i=1,...,n}$ une base de F. Choisissons pour f l'application linéaire qui envoie e_i sur f_i pour tout i=1,...,n. Cela signifie qu'un point x de E s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, f(x) vaudra: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. f ainsi définie est bien linéaire. De plus son noyau est réduit à l'élément nul de E. Son rang est donc égal à n. Cela signifie que son image est de dimension n mais aussi qu'elle est surjective. f définie bien un isomorphisme entre E et F.

Terminons par la propriété suivante qui n'a rien de très surprenant:

Proposition Soient E, F, G trois k-espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires définies l'une de E dans F et l'autre g de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire définie de E dans G.

Démonstration Soient x et y deux éléments de E, α et β deux éléments de k. La linéarité de f puis celle de g implique: $g \circ f(\alpha x+\beta y)=g(\alpha f(x)+\beta f(y))=\alpha g \circ f(x)+\beta g \circ f(y)$, ce qui démontre la propriété.

4 Structure de $\mathcal{L}$(E,F)

Proposition Soient E et F deux k-espaces vectoriels. Alors: ($\mathcal{L}$(E,F),+,.) est un k-espace vectoriel (où . désigne la loi externe de $k \times \mathcal{L}(E,F)$ dans E qui au couple (λ, f) de$k \times \mathcal{L}(E,F)$ associe λf).

Démonstration On vérifie sans peine que si f et g sont des applications linéaires de E dans F et que $\lambda \in k$ alors $f+g$ et λf sont des applications linéaires définies de E dans F. On vérifie même, et ce tout aussi facilement, que si $\beta \in k$ alors $\lambda f+\beta g$ est un élément de $\mathcal{L}$(E,F). Donc $\mathcal{L}$(E,F) est un sous espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F. C'est donc un k-espace vectoriel.

Proposition Soit E un k-espace vectoriel. ($\mathcal{L}$(E),+,$\circ$) est une anneau unitaire (pas forcément commutatif). L'unité est donnée par l'application identique de E.

Démonstration C'est facile!

Proposition L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{L}$(E) est un groupe pour la loi de composition $\circ$ de $\mathcal{L}$(E). Ce groupe est le groupe linéaire de E: GL(E).

Démonstration Notons Inv(E) l'ensemble des applications inversibles de $\mathcal{L}$(E). Si $f \in$Inv(E) alors $\exists g \in$Inv(E) tel que $f \circ g=g \circ f=Id$. f est donc bijective. Comme c'est une application linéaire, c'est aussi un isomorphisme, et donc un élément de GL(E). Réciproquement, supposons que f est un élément de GL(E). Pour vérifier que f est un élément de Inv(E), il suffit de vérifier que l'application réciproque de f est linéaire: désignons par g cette application réciproque et montrons que g est linéaire. Si y et y' sont éléments de E, il existe des éléments x et x' de E tels que y=f(x) et y'=f(x'). Alors si $\alpha,\beta \in k$, $g(\alpha y+\beta y')=g(\alpha f(x)+\beta f(x'))=g\circ f(\alpha x+\beta x')$. Cette dernière égalité étant conséquence de la linéarité de f. Mais g est l'application réciproque de f donc $g\circ f=Id_E$. On obtient alors $g(\alpha y+\beta y')=\alpha x+\beta x'=\alpha g(y)+\beta g(y')$, relation qui prouve la linéarité de g. L'égalité entre les deux ensembles GL(E) et Inv(E) est alors assurée. Comme Inv(E) est un sous groupe de $\mathcal{L}$(E) pour la loi de composition, il en est de même de GL(E).

Remarquons que cette dernière proposition justifie le nom donné à GL(E): **groupe** linéaire.

5 Des applications linéaires particulières: les projecteurs

Proposition Soit E un k-espace vectoriel. Soient F et F' deux sous espaces qui sont supplémentaires dans E. Soient p et p' les endomorphismes de E définies par, $\forall x \in E$ x=p(x)+p'(x), p(x)∈F et p'(x)∈F'. p et p' sont linéaires et vérifient $p^2=p$, $p'^2=p'$, $p\circ p'=p'\circ p=0$, Ker p=Im p', Ker p'=Im p.

Démonstration Montrons que p et p' sont bien définies. Soient x∈E ,soient $x_1,x_2 \in F$ et $x'_1,x'_2 \in F'$ tels que $x=x_1+x'_1=x_2+x'_2$. Alors $x_1-x_2=x'_1-x'_2$. Le premier membre de cette égalité est élément de F et le second est élément de F'. Donc, ces deux membres sont à la fois éléments de F et de F'. Ceci n'est possible que si chacun des deux membres est nul. Donc $x_1=x_2$ et $x'_1=x'_2$. p et p' sont donc bien définies.
On vérifie facilement que ces deux applications sont linéaires. Si x est élément de F alors p(x)=x, ce qui prouve que $p^2=p$. Idem pour p'. Les autres égalités sont évidentes.

Définition Soit E un k-espace vectoriel. Soit Π un endomorphisme de E tel que $\Pi^2=\Pi$.(Π est idempotent). Π est un **projecteur** sur E.

Proposition Soit p un projecteur définie sur le k-espace vectoriel E. Soit $p'=Id_E-p$. Soient F=Im p et F'=Im p'. Alors F et F' sont supplémentaires dans E. p est le projecteur sur F parallèlement à F'.

Démonstration Soit x∈E. x vérifie: x=p(x)+p'(x). Donc F et F' vérifient F+F'=E. On vérifie facilement que p' est un projecteur ($p'^2=p'$). Supposons que x est élément de F∩F'. Alors il existe y∈F et y'∈F' tels que x=p(y)=y'-p(y). Appliquons p à ces égalités: $p(x)=p^2(y)=p(y)=x=p(y')-p^2(y')=p(y')-p(y')=0$. Donc x=0. Ce qui prouve que le somme F+F' est directe et donc que F et F' sont supplémentaires dans E.

6 Espaces vectoriels quotients

Définition -**Proposition** Soit E un k-espace vectoriel. Soit V un sous espace de E. Sur E, on considère la relation d'équivalence suivante: si $x,y \in E$ $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y \in V$. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. On note E/V l'ensemble $E/\mathcal{R}$ des classes d'équivalences de cette relation. E/V a une structure de k-espace vectoriel.

Démonstration Rappelons que (E,+) a une structure de groupe et que dans un groupe la relation précédemment définie est une relation d'équivalence. De plus, comme (E,+) est un groupe abélien, (V,+) est un sous groupe distingué de E. E/V a donc une structure de groupe abélien pour la loi + héritée de celle de E. Définissons une loi externe sur E/V par: si $\overline{x}$ ∈E/V et λ ∈k alors $\lambda\overline{x}=\overline{\lambda x}$. Montrons que cette loi est bien définie. Il faut pour cela vérifier que si $\overline{x}=\overline{y}$ alors $\lambda\overline{x}=\lambda\overline{y}$. La première égalité implique que x-y∈ V. Comme λV=V, λ(x-y)∈V et donc λx-λy∈V. Ce qui prouve que notre loi externe est bien définie. Il faudrait encore vérifier les quelques axiomes restant pour terminer de montrer que E/V est un espace vectoriel mais c'est élémentaire.

Proposition Soit E et F deux k-espaces vectoriels et V un sous espace vectoriel de E. Soit Π l'application de E dans E/V qui à x associe sa classe d'équivalence $\overline{x}$ dans E/V (Π est la projection de E dans E/V). Soit aussi f une application linéaire définie de E dans F. Alors:

- Π est une application linéaire de E dans E/V.
- Il existe une unique application linéaire $\overline{f}$:E/V→F telle que $\forall x \in E\, f(x) = \overline{f} \circ \Pi(x)$.

Démonstration Considérant E et F comme des groupes additifs et f comme un homomorphisme entre groupe additif, on sait que Π:E→E/V est un homomorphisme de groupe et qu'il existe un morphisme $\overline{f}$ vérifiant $f = \overline{f} \circ \Pi$. Nous avons même prouvé dans la proposition précédente que Π est une application linéaire entre les espaces vectoriels E et E/V. Il suffit maintenant de montrer que $\overline{f}$ est elle aussi linéaire. Pour ce faire, choisissons deux éléments x et y de E et deux éléments λ et β de k. Alors $\overline{x} = \Pi$(x) et $\overline{y} = \Pi$(y). Donc $\overline{f}(\lambda\overline{x}+\beta\overline{y})$=f∘$\Pi(\alpha x+\beta y)$=αf∘Π(x)+βf∘Π(y). Ce qui prouve la linéarité de $\overline{f}$.

Proposition Soit E et F deux k-espace vectoriel. Soit f une application linéaire définie de E dans F. Ker f étant un sous espace vectoriel de E, on peut considérer l'espace vectoriel quotient: E/Ker f. Soit Π la projection de E dans E/Ker f qui à x associe sa classe d'équivalence $\overline{x}$ dans E/Ker f. L'application $\overline{f}$=f∘Π est un isomorphisme de E/ker f sur Im f.

Démonstration Rapellons que si f est un morphisme entre espaces vectoriels, Im f est un sous espace vectoriel de l'espace d'arrivée de f. On a démontré dans la proposition précédente que $\overline{f}$ est une aplication linéaire de E/Ker f dans F. Il suffit de démontrer qu'elle est injective. (Elle est nécessairement surjective sur son image). Soit $\overline{x}$ ∈Ker f. Alors $\overline{f}(\overline{x})$=0. Mais par définition de $\overline{f}$, si x∈E est tel que Π(x)=$\overline{x}$ cela implique que $\overline{f} \circ \Pi$(x)=0 soit encore f(x)=0 et donc x∈ $Ker f$. Soit $\overline{x}$=0. La proposition est ainsi démontrée.

Proposition Soit F un sous espace vectoriel du k-espace vectoriel E. Tout supplémentaire de F dans E est isomorphe à E/F.

Démonstration Soit F' un supplémentaire de F dans E. Soit Π l'application canonique définie de E dans E/F qui à un vecteur v de E associe sa classe d'équivalence $\overline{v}$ dans E/F. Soit $\Pi_{/F'}$ la restriction de cette application linéaire au sous espace vectoriel F' de E. Le noyau Ker $\Pi_{/F'}$ vérifie Ker $\Pi_{/F'}$ = Ker Π∩F'=F∩D'=$\{0\}$. De plus $\Pi_{/F'}$ est surjective car si $\overline{v}$ est élément de E/F alors , v étant élément de E, on peut le décomposer en la somme v=u+u' où u∈F et u'∈F' et comme v-u'=u∈F, $\overline{v}$=Π(v)=Π(u)=$\Pi_{/F'}$(u)=$\overline{u}$. Donc $\Pi_{/F'}$ est un isomorphisme entre F' et E/F.

Proposition Soit E un k-espace vectoriel et V un sous espace vectoriel de E. Si E est de dimension finie alors dim E=dim V+dim E/V.

Démonstration La projection Π:E→E/V est une application linéaire surjective. Donc rg Π=dim E/V. De plus Ker Π=V. Comme dim E=dim Ker Π+rg Π, la formule dim E=dim V+dim E/V est vérifiée.

Le travail précédent nous permet la définition:

Définition Soit E un k-espace vectoriel et soit F un sous espace vectoriel de E. Soit F' un supplémentaire de F dans E. Si F' est de dimension infinie, on dit que F est de **codimension infinie**. Sinon on appelle **codimension** du sous espace vectoriel F la dimension de ce supplémentaire.

Cette notion a un sens car les supplémentaires d'un sous espace vectoriel sont isomorphes et donc s'ils sont de dimension finie, ont même dimension. Terminons par:

Définition Un sous espace vectoriel de codimension 1 est un **hyperplan vectoriel**.