

# Dual d'un espace vectoriel

## 1 Introduction

L'espace dual d'un espace vectoriel est l'ensemble de toutes les formes linéaires définies sur cet espace ( c'est à dire l'ensemble de toutes les applications linéaires définies de cet espace dans son corps de base ). La dualité est un instrument technique intervenant souvent en mathématiques. Donnons quelques exemples.

- L'application qui à un vecteur associe sa ième coordonnée dans une base donnée d'un espace vectoriel est une forme linéaire.
- La dualité sert à définir la topologie de la convergence simple sur certains espaces fonctionnels. Ces espaces interviennent entre autre quand on étudie les distributions.
- En calcul différentiel, les différentielles de fonctions définies d'un espace vectoriel dans  $\mathbb{R}$  sont des formes linéaires et donc des éléments du dual de l'espace vectoriel considéré.
- En géométrie, les formes linéaires servent à donner des équations dpour es hyperplans. Ce qui en fait aussi un outil de travail pour la géométrie projective.

## 2 Définitions

Si on considère un corps  $k$ , il est par définition muni d'une loi interne donnée par l'addition. La multiplication dans ce corps peut être vue comme une loi externe de  $k \times k$  dans  $k$ . Le corps  $k$  muni de cette loi interne et de cette loi externe a ainsi une structure de espace vectoriel sur lui même. Sa dimension sera évidemment égal à 1. Cette remarque donne un sens à la définition qui suit.

**Définition** Une **forme linéaire** sur un  $k$ -espace vectoriel  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans le corps  $k$ . On note  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ .

**Proposition** L'ensemble  $E^*$  des formes linéaires définies sur le  $k$ -espace vectoriel  $E$  possède une structure d'espace vectoriel pour la loi interne donnée par l'addition des fonctions de  $E$  dans  $k$  et la loi externe donnée par la multiplication d'une fonction par un scalaire de  $k$ .  $E^*$  est appelé **espace vectoriel dual** de l'espace vectoriel  $E$ .

**Démonstration** Rappelons que l'ensemble des fonctions linéaires  $\mathcal{L}(E,F)$  définies entre deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  possède une structure d'espace vectoriel pour les lois précédemment mentionnées.  $E^*$  est en fait égal à  $\mathcal{L}(E,k)$ , qui possède bien une structure d'espace vectoriel.

**Notation** Si  $f$  est un élément de  $E^*$  et  $x$  un élément de  $E$ , on notera  $\langle f, x \rangle$  la valeur de  $f$  prise en  $x$ . Cette notation, qui fait référence au produit scalaire, est ici utile car on s'occupera du sous ensemble de  $E^*$  des formes linéaires sur  $E$  s'annulant que une partie  $F$  de  $E$ . Ce sous ensemble sera noté  $F^\circ$  et sera appelée l'orthogonale de  $F$ . De la même façon, on étudiera l'orthogonale d'une partie  $U$  de  $E^*$ , et qui sera l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  dont l'image, par tout les éléments de  $U$  vaut 0. Attention cependant de ne pas confondre ce qui n'est qu'une notation avec le réel produit scalaire.

**Définition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . On appelle **orthogonal** de  $E$  et on note  $F^\circ$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$  qui s'annulent sur  $F$ .

$$F^\circ = \{f \in E^*; \forall x \in F \langle f, x \rangle = 0\}.$$

**Proposition** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  tels que  $F_1 \subset F_2$  alors  $F_2^\circ \subset F_1^\circ$ .

**Démonstration** C'est évident: Si  $f$  est une forme linéaire définie sur  $E$  qui s'annule sur  $F_2$  alors, comme  $F_1$  est une partie de  $F_2$ , elle s'annule sur  $F_1$ . D'où l'inclusion indiquée.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et  $F$  une sous partie de  $E$ . Alors  $F^\circ = (\text{Vect } F)^\circ$ .

**Démonstration** Comme  $F \subset \text{Vect } F$ , il est clair que  $(\text{Vect } F)^\circ \subset F^\circ$ . Si  $u$  est élément de  $F^\circ$ , alors  $u$  s'annule sur tout élément de  $F$ , et comme  $u$  est linéaire, elle s'annule sur toutes combinaisons linéaires d'éléments de  $F$ .  $u$  s'annule donc sur  $\text{Vect } F$  et est élément de  $(\text{Vect } F)^\circ$ . Ce qui prouve l'inclusion réciproque.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Notons  $i$  l'application d'inclusion de  $F$  dans  $E$ :  $i: F \rightarrow E$ ,  $x \in F \rightarrow i(x) = x$ . Remarquons que toute forme linéaire sur  $E$  définie, par restriction de cette application à  $F$ , une forme linéaire sur  $F$ . Notons  ${}^t i$  l'application de  $E^*$  dans  $F^*$  qui a une forme linéaire définie sur  $E$  associe sa restriction à  $F$ . Remarquons que si  $f \in E^*$  alors  ${}^t i(f) = f \circ i$ . De plus  ${}^t i$  est une application linéaire surjective et  $\text{Ker } {}^t i = F^\circ$ .

**Démonstration** On vérifie sans peine que  ${}^t i$  est linéaire de  $E^*$  dans  $F^*$ . De plus:  $f \in \text{Ker } {}^t i \Leftrightarrow f \circ i = 0 \Leftrightarrow \forall x \in F, f(x) = 0 \Leftrightarrow f \in F^\circ$ . Ce qui prouve que  $\text{Ker } {}^t i = F^\circ$ . Vérifions aussi la surjectivité. Soit  $f \in F^*$  et soit  $F'$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . Tout élément  $x$  de  $E$  possède une décomposition de la forme  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in F'$ . Définissons l'application:  $\tilde{f}$  par:  $\tilde{f}(x) = f(x_1)$ . On vérifie sans peine que  $\tilde{f}$  est bien définie, que c'est une forme linéaire sur  $E$  et donc un élément de  $E^*$ , et que  ${}^t i(\tilde{f}) = f$ .

**Définition** Soit  $E$  et  $F$  deux  $k$ -espaces vectoriel. Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **application transposée** de l'application  $\Phi$  et on note  ${}^t \Phi$  l'application:  ${}^t \Phi: F^* \rightarrow E^*$  qui à

$f \in F^*$  associe la forme linéaire sur  $E$   $f \circ \Phi = f \circ \Phi$ .

**Définition** Soit  $E$  un  $k$  espace vectoriel et soit  $U$  une partie de  $E^*$ . On appelle **orthogonal de  $U$**  et on note  $U^\perp$  la sous partie de  $E$  donnée par:

$$U^\perp = \{x \in E / \forall u \in U, \langle u, x \rangle = 0\}.$$

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel.

- Si  $U$  est une partie de  $E^*$ :  $U^\perp = (\text{Vect}(U))^\perp$ .
- Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous ensembles de  $E^*$  tels que  $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2^\perp \subset F_1^\perp$ .
- Si  $U$  est un sous espace vectoriel de  $E^*$  alors  $F^\perp = \bigcap_{u \in F} \text{Ker } u$ .

**Démonstration** Contentons nous de prouver le troisième point. Les démonstrations des points 1 et 2 sont exactement les mêmes que celles faites précédemment. Prenons donc un sous espace vectoriel  $F$  de  $E^*$ . Soit aussi  $u \in F$ . Pour tout  $x$  dans  $F^\perp$ ,  $\langle u, x \rangle = 0$ . Donc  $x \in \text{Ker } u$  et  $F^\perp \subset \bigcap_{u \in F} \text{Ker } u$ . Maintenant si  $x$  est un élément de cette intersection, alors pour tout  $u \in F$ ,  $\langle u, x \rangle = 0$  et donc  $x \in F^\perp$ , ce qui prouve l'inclusion inverse.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et soit  $F$  une sous partie de  $E$ . Alors:

1.  $F \subset F^{\circ\perp}$ .
2.  $F^\circ = F^{\circ\perp\circ}$ .

**Démonstration**

1. Commençons par le premier point: Soit  $x$  un élément de  $F$ . Pour tout  $f$  de  $F^\circ$ ,  $f(x) = 0$ , ce qui implique que  $F \subset F^{\circ\perp}$ .
2. Pour le second point: l'inclusion précédente permet d'obtenir:  $F^{\circ\perp\circ} \subset F^\circ$ . De plus, si  $f \in F^\circ$ , pour tout  $x \in F^{\circ\perp}$ ,  $\langle f, x \rangle = 0$ . Ce qui nous assure de l'inclusion réciproque.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et soit  $f$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ . Alors:  $\text{Codim Ker } f = 1$ .

**Démonstration** Comme  $f$  est non nulle, elle est surjective et son image est égale à  $k$  tout entier. Mais le théorème d'isomorphie pour les applications linéaires permet d'affirmer que  $E/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f$ . Par conséquent, comme tout supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$  est isomorphe à  $E/\text{Ker } f$ , tout supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$  est de dimension 1. Ce qui veut exactement dire que  $\text{Ker } f$  est de codimension 1.

### 3 Dualité et dimension finie

**Proposition** Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie alors le dual de  $E$  possède la même dimension que  $E$ .

**Démonstration** Rappelons ici encore que  $E^* = \mathcal{L}(E, k)$  et que si  $E$  et  $F$  sont deux  $k$  espaces vectoriels de dimension finie alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $\dim E \times \dim F$ . Comme  $k$  est de dimension 1, la proposition est démontrée.

**Définition** Soient  $u, j \in \mathbb{N}$ . On définit le **symbole de Kronecker**  $\delta_{ij}$  par:

- $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .
- $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ .

**Théorème** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Considérons les  $n$  formes linéaires  $e_i^*$   $i=1, \dots, n$  définies par  $\forall i=1, \dots, n$   $\forall j=1, \dots, n$ ,  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker. Alors la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$  appelée **base duale** de la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Démonstration** Comme  $\dim E^* = n$ , il suffit de démontrer que la base considérée est libre dans  $E^*$ . Ainsi, elle sera libre maximale et donc sera une base de  $E^*$ . Soit  $\lambda_i$   $i=1, \dots, n$  une famille de  $n$  scalaires de  $k$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0$ . Alors, fixant  $i_0$  parmi  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_{i_0}) = 0$ . Ce qui équivaut à  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ii_0} = 0$ . Soit encore  $\lambda_{i_0} = 0$ . Effectuant cette opération pour chaque  $i_0$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on trouve  $\lambda_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  décrit donc bien une famille libre de  $E^*$ .

Dans le cas de la dimension infinie, le théorème suivant n'est vrai, comme nous l'avons montré, que dans un sens.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F = F^{\circ\perp}$ .
- Soit  $F'$  un sous espace vectoriel de  $E^*$  alors  $F' = F'^{\perp\circ}$ .

**Démonstration** On a déjà montré l'inclusion  $F \subset F^{\circ\perp}$ . Soit  $x \in F^{\circ\perp}$ . Notons  $k = \dim F$  et soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$ . Notons  $n = \dim E$  et complétons cette base de  $F$  en une base de  $E$ :  $(e_1, \dots, e_n)$ . Le sous espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . Une base de  $F^\circ$  est donnée par la base duale de ce supplémentaire:  $(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$ . Soit  $x \in F^{\circ\perp}$ . Il existe  $n$  scalaires  $\lambda_i \in k$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ . Comme  $e_{k+i}^*(x) = 0$  pour tout  $i=1, \dots, n-k$ ,  $x_{k+i} = 0$  pour tout  $i=1, \dots, n-k$  et  $x$  est bien élément de  $F$ . Voilà qui prouve l'inclusion réciproque. Le second point se

démontre de façon complètement analogue, ...duale oserais-je dire!

Terminons par une proposition qui fait le lien entre la notion de matrice transposée et celle d'application linéaire transposée.

**Proposition** Soient E et F deux k-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n. Soit  $\Phi$  une application linéaire de E dans F. Considérons une base  $e=(e_1, \dots, e_m)$  de E ainsi qu'une base  $f=(f_1, \dots, f_n)$  de F. Notons  $e^*=(e^*_1, \dots, e^*_m)$  et  $f^*=(f_1, \dots, f_n)$  les bases duales correspondantes. Soit  $M(\Phi, e, f)$  la représentation matricielle de  $\Phi$  dans les bases e de E et f de F et  $M({}^t\Phi, f^*, e^*)$  la représentation matricielle de l'application transposée  ${}^t\Phi$  dans les bases  $f^*$  de  $F^*$  et  $e^*$  de  $E^*$ . Alors  $M({}^t\Phi, f^*, e^*) = {}^tM(\Phi, e, f)$ .

**Démonstration** Posons  $M(\Phi, e, f) = (\lambda_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ . Posons aussi  $M({}^t\Phi, f^*, e^*) = (\lambda'_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ . En particulier pour tout  $i=1, \dots, m$

$$\Phi(e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} f_j.$$

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  ${}^t\Phi(f_i^*) = f_i^* \circ \Phi$ . Soit  $x \in E$ . Il existe  $x_p \in k$ ,  $p=1, \dots, m$ ,

$$x = \sum_{p=1}^m x_p e_p.$$

et

$$\begin{aligned} {}^t\Phi^*(f_i^*)(x) &= \sum_{p=1}^m x_p f_i^* \circ \Phi(e_p) \\ &= \sum_{p=1}^m x_p f_i^* \left( \sum_{j=1}^n \lambda_{pj} f_j \right) \\ &= \sum_{p=1}^m x_p \lambda_{pi}. \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout  $x \in E$ , on a:

$$\begin{aligned} {}^t\Phi^*(f_i^*) &= \sum_{p=1}^m \lambda_{pi} e_p^* \\ &= \sum_{p=1}^m \lambda'_{ip} e_p^*. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients entre les deux membres de la dernière égalité, on obtient pour tout  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$   $\lambda'_{ij} = \lambda_{ji}$ , ce qui était à démontrer.

## 4 Formes linéaires et hyperplans

Dans tout ce paragraphe,  $E$  est un sous espace vectoriel de dimension quelconque.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel.

- Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$  est un hyperplan de  $E$ . Deux formes proportionnelles ont un noyau égal au même hyperplan.
- Réciproquement si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , il existe une forme linéaire non nulle ayant  $H$  comme noyau. De plus, toute forme linéaire non nulle ayant  $H$  comme noyau est proportionnelle à  $f$ .

**Démonstration**

- Si  $f \in E^*$ , et si  $x_0 \in E \setminus \text{Ker } f$ , pour tout  $x \in E$ , on a la décomposition

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 = x_1 + x_2.$$

Remarquons que  $f(x_1)=0$  et que  $f(x_2) = f(x)$ . Cette décomposition définit deux sous espaces en somme directe dans  $E$ :  $E_1 = \{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0; \forall x \in E\}$  et  $E_2$  le sous espace engendré par  $x_0$ . On montre facilement que  $E_2 = \text{Ker } f$ .  $\text{Ker } f$  est donc de codimension 1 et définit un hyperplan de  $E$ . Enfin si  $f'$  est une seconde forme proportionnelle à  $f$ , il est clair que ces deux formes ont même noyau.

- Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Soit  $x_0$  un vecteur de  $E \setminus H$ .  $E$  peut être décomposé sous la forme  $E = H \oplus \langle x_0 \rangle$  et pour tout  $x \in E$ , il existe  $x_H \in H$  et  $\lambda(x) \in k$  uniques tels que  $x = x_H + \lambda(x)x_0$ . Posons, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $f(x) = \lambda(x)$ . On vérifie sans problème que  $f$  est bien définie et qu'elle est linéaire de  $E$  dans  $k$ . De plus, son noyau est exactement égal à  $H$ . Soit  $g$  une autre forme linéaire ayant  $H$  comme noyau. Utilisant la décomposition de  $E = H \oplus \langle x_0 \rangle$  précédente, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x = x_H + \lambda(x)x_0$  et  $g(x) = \lambda(x)g(x_0) = g(x_0)/f(x_0) \cdot f(x)$ .  $f$  et  $g$  sont donc bien proportionnelles.

## 5 Quelques relations et un théorème

**Proposition** Soient  $A$  et  $B$  deux sous espace vectoriel de  $E$ :

1.  $(A+B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ .
2.  $(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$ .

**Démonstration**

1. Si  $f \in (A+B)^\circ$  alors pour tout  $x$  de  $A$  et tout  $y$  de  $B$ ,  $f(x+y)=0$ . En particulier,  $A$  et  $B$  étant des sous espaces vectoriel de  $E$ , ils contiennent  $0$  et on peut déduire de l'égalité précédente les deux égalités:  $f(x+0)=0$  et  $f(0+y)=0$ . Ce qui prouve que  $f$

est élément de  $A^\circ$  et de  $B^\circ$  et donc de l'intersection de ces deux ensembles.

Si  $f$  est élément de  $A^\circ \cap B^\circ$  alors  $f$  s'annule sur  $A$  et sur  $B$ . Ce qui implique que  $f$  s'annule sur  $A+B$  et prouve l'inclusion réciproque.

2. Soit  $f \in A^\circ + B^\circ$ .  $f$  peut alors s'écrire sous la forme  $f=f_1+f_2$  avec  $f_1 \in A^\circ$  et  $f_2 \in B^\circ$ . Si  $x \in A \cap B$  alors nécessairement  $f(x)=0$  et donc  $A^\circ + B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ .

Pour montrer la seconde inclusion, décomposons  $A_1$  et  $B_1$  sous la forme  $A=A_1 \oplus A \cap B$  et  $B=B_1 \oplus A \cap B$ .  $E$  possède alors un sous espace  $C$  tel que  $E=A \cap B \oplus A_1 \oplus B_1 \oplus C$ .

Un élément  $f$  de  $E^*$  peut s'écrire sous la forme matricielle  $f=(g \ f_1 \ f_2 \ h)$  où  $g \in (A \cap B)^*$ ,  $f_1 \in A_1^*$ ,  $f_2 \in B_1^*$ ,  $h \in C^*$ . Ainsi si  $f$  est élément de  $(A \cap B)^\circ$ ,  $f$  possède une écriture de la forme  $(0 \ f_1 \ f_2 \ h)=(0 \ f_1 \ 0 \ 0)+(0 \ 0 \ f_2 \ h)$ . Mais  $(0 \ f_1 \ 0 \ 0) \in B^\circ$  et  $(0 \ 0 \ f_2 \ h) \in A^\circ$ . Ce qui prouve que  $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ + B^\circ$ .

**Proposition** Soient  $E$  et  $F$  deux  $k$ -espace vectoriels. Si  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ :

1.  $(\text{Im } \Phi)^\circ = \text{Ker } {}^t\Phi$ .
2.  $(\text{Ker } \Phi)^\circ = \text{Im } {}^t\Phi$ .

### Démonstration

1. Si  $f \in (\text{Im } \Phi)^\circ \Leftrightarrow \forall x \in E, f \circ \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f \in \text{Ker } {}^t\Phi$ .
2. Si  $f$  est élément de  $\text{Im } {}^t\Phi$  alors il existe  $g \in F^*$  tel que  $f = g \circ \Phi$ . Si  $x \in \text{Ker } \Phi$ ,  $f(x) = g \circ \Phi(x) = 0$ . Donc  $f \in (\text{Ker } \Phi)^\circ$  et  $\text{Im } {}^t\Phi \subset (\text{Ker } \Phi)^\circ$ .

L'inclusion difficile à montrer est la suivante:  $(\text{Ker } \Phi)^\circ \subset \text{Im } {}^t\Phi$ . Notons  $E_1 = \text{Ker } \Phi$  et  $F_1 = \text{Im } \Phi$ . On trouve des supplémentaires  $E_2, F_2$  de, respectivement  $E_1$  et  $F_1$  dans  $E$  et  $F$ :  $E = E_1 \oplus E_2$  et  $F = F_1 \oplus F_2$ .  $\Phi$  peut être représentée par la matrice:

$$\Phi = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}$$

où  $\theta: E_2 \rightarrow F_1$  est un isomorphisme car  $E_2 \simeq F/\text{Ker } \Phi \simeq \text{Im } \Phi$ . Soit  $u \in E^*$ .  $u$  peut être représentée par la matrice  $(u_1, u_2)$  où  $u_1 \in E_1^*$  et où  $u_2 \in E_2^*$ . Remarquons de plus que si  $v \in F^*$  alors  $v$  peut être représentée par la matrice  $v=(v_1, v_2)$  avec  $v_1 \in F_1^*$  et  $v_2 \in F_2^*$ . Supposons que  $u=(u_1, u_2)$  soit élément de  $(\text{Ker } \Phi)^\circ = E_1^\circ$ . Alors  $u_1=0$  et prenant un élément  $v_2$  quelconque dans  $F_2^*$

$$u = (0, u_2) = (\theta^{-1}u_2, v_2) \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v \circ \Phi.$$

Et donc  $u$  est dans l'image de  ${}^t\Phi$ .

**Théorème** Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  formes linéaires sur  $E$ . Posons pour tout  $i=1, \dots, n$   $H_i = \text{Ker } f_i$ .  $E^*$  étant un espace vectoriel, la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  peut être vue comme un ensemble de  $n$  vecteurs de  $E^*$ . On a alors les deux propriétés suivantes:

1. Le rang de ce système de vecteur est égale à la codimension de  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i$ .

$$2. f \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle \Leftrightarrow H_1 \cap \dots \cap H_k \subset \text{Ker } f.$$

**Démonstration** Remarquons pour commencer que  $H_1 \cap \dots \cap H_k$  est un sous espace vectoriel de  $E$  car intersection de sous espace vectoriel de  $E$ . Soit  $F$  un supplémentaire de ce sous espace vectoriel dans  $E$ . Il existe donc un isomorphisme entre  $F$  et  $E/H_1 \cap \dots \cap H_k$ . Si  $f \in E^*$ , notons  $f'$  la restriction de  $f$  à  $F$ . On a vu déjà que si  $i$  désigne l'inclusion de  $F$  dans  $E$ ,  $f' \circ i = f$ . Soit  ${}^t i: E^* \rightarrow F^*$   $f \mapsto {}^t(f) = f'$ . On sait que  ${}^t i$  est linéaire. Donc  $E^*/\text{ker } {}^t i \simeq \text{Im } {}^t i$ . Ce qui s'écrit encore,  ${}^t i$  étant surjective,  $F^* = E^*/\text{Ker } {}^t i$ . Mais on a démontré précédemment que  $\text{Im } {}^t i = (\text{Ker } i)^\circ = (H_1 \cap \dots \cap H_k)^\circ$ . On a alors prouvé l'isomorphisme  $(H_1 \cap \dots \cap H_k)^\circ \simeq F^*$ . Mais  $(H_1 \cap \dots \cap H_k)^\circ = H_1 + \dots + H_k = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ . Ce qui démontre le théorème.

## 6 Bidual

**Définition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $E^*$  le dual de  $E$ . On appelle **bidual** de  $E$  l'espace vectoriel dual de  $E^*$ . On note  $E^{**}$  cet espace vectoriel.

**Proposition** Considérons l'application:  $i: E \rightarrow E^{**}$  qui à  $x \in E$  associe l'application  $i(x): E^* \rightarrow k$  telle que si  $f \in E^*$ ,  $i(x)(f) = f(x)$ .  $i$  est bien définie, est linéaire et injective. Identifiant  $E$  à l'image de  $i$  dans  $E^{**}$ , on dira que  $E$  est inclu dans son bidual.

**Démonstration** On vérifie sans problème que  $i$  est bien définie et linéaire. De plus si  $x \in E$  est tel que  $\forall f \in E^* i(x)(f) = 0$  alors  $\forall f \in E^*, f(x) = 0$  et forcément  $x = 0$ . Donc  $\text{Ker } i = \{0\}$  et  $i$  est injective.

La question corollaire de cette proposition est bien sûr: pour quelles conditions  $i$  est surjective? Dans le cas où  $i$  est surjective, on aura exhiber un isomorphisme entre  $E$  et son bidual  $E^{**}$ . Remarquons que cet isomorphisme est définie de façon indépendante d'une base sur  $E$  ou  $E^{**}$ .  $i$  est par conséquent, sous réserve de conditions assurant de sa surjectivité, un **isomorphisme canonique** entre  $E$  et  $E^{**}$ . Voyons ces conditions:

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel.  $E$  est isomorphe à son bidual  $E^{**}$  si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

**Démonstration** Supposons que  $E$  est de dimension finie.  $E$  et son dual  $E^*$  ont par conséquent même dimension.  $E^*$  est donc, en particulier, aussi un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Ré-appliquons ce qui vient d'être dit pour  $E$  à  $E^*$ :  $E^*$  et son dual  $E^{**}$  sont de même dimension. Conclusion:  $E$  et  $E^{**}$  ont même dimension.  $i$  est alors nécessairement surjective ( formule du rang ) et définit bien un isomorphisme de  $E$  dans son bidual.

Supposons maintenant que  $E$  n'est pas de dimension finie. Il existe alors une famille libre dénombrable  $(e_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  ( $I$  désigne un ensemble dénombrable). Considérons  $F$  le sous espace vectoriel engendré par cette famille. Considérons aussi

un supplémentaire  $G$  de ce sous espace vectoriel. On a:  $E=F\oplus G$ . Pour tout  $x$  vecteur de  $E$ , il existe une famille  $(\alpha_i)_{i\in I}$  de scalaire de  $k$  à support finie et un vecteur  $g\in G$  tels que

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i + g.$$

Considérons les formes linéaires  $e_i^*$  de  $E^*$  définie par  $\forall x \in E$  de la forme précédente,  $e_i^*(x) = \langle e_i, x \rangle = \alpha_i$ . On vérifie facilement que la famille  $(e_i^*)_{i\in I}$  est libre dans  $E^*$ . Considérons la aussi le sous espace vectoriel  $F'$  de  $E^*$  engendré par cette famille ainsi qu'un supplémentaire  $G'$  de  $F'$ :  $E^* = F' \oplus G'$ . Pour tout  $f \in E^*$ , il existe une famille à support fini  $(\beta_i)_{i\in I}$  de scalaires de  $k$  ainsi qu'un élément  $g' \in G'$  tels que

$$f = \sum_{i\in I} \beta_i e_i^* + g'.$$

Pour tout  $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i + g \in E$ ,  $i(x): E^* \rightarrow k$  est telle que l'ensemble des  $i\in I / i(x)(e_i^*) \neq 0$  est de cardinal fini. L'image de  $i$  est donc incluse dans l'ensemble noté  $\mathcal{A}$  des formes linéaires  $\theta$  définies de  $E^*$  dans  $k$  et telles que  $\{i\in I / \theta(e_i^*) \neq 0\}$  soit de cardinal fini. Considérons  $\theta: E^* \rightarrow k$  définie par, si  $f = \sum_{i\in I} \beta_i e_i^* + g' \in E^*$

$$\theta(f) = \sum_{i\in I} \beta_i.$$

On vérifie que  $\theta$  est bien définie et linéaire.  $\theta$  est donc élément de  $E^{**}$ . Cependant  $\theta$  n'est pas dans l'ensemble  $\mathcal{A}$  car  $\forall i \in I, \theta(e_i^*) = 1$ . Donc  $\theta$  n'est pas dans l'image de  $i$  et  $i$  n'est pas surjective.  $E$  et  $E^{**}$  ne sont alors pas isomorphes.