

Espaces topologiques compacts

1 Introduction

La compacité est une notion qui, tout comme la complétude, nous permettra de nous assurer de l'existence de certains objets mathématiques. Elle permettra ainsi de prédire l'existence de la limite pour certaines suites ou l'existence des extremums pour une fonction numérique. Elle servira, d'autre part, à se ramener, partant d'une situation présentant "un caractère infini" à une situation "finie" et exploitable. Les espaces compacts sont une généralisation, dans le cadre des espaces topologiques, de la notion d'intervalle fermé et borné de \mathbb{R} .

2 Notions de base

Dans tout le chapitre, on se place sur un espace topologique (X, \mathcal{O}) .

Notation I désignera un ensemble quelconque (fini, dénombrable ou indénombrable).

Définition Soit $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$. On dira que $(U_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement ouvert** de X si $\forall i \in I, U_i \in \mathcal{O}$ et que

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Remarque On parlera de recouvrement fini (resp. dénombrable, quelconque...) si I est fini (resp. dénombrable, quelconque...).

Définition On dira que (X, \mathcal{O}) est un **espace topologique séparé** si pour tout x et y de X , il existe des ouverts O_x et O_y tel que $x \in O_x, y \in O_y$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Définition On dira que (X, \mathcal{O}) est un **espace topologique compact** si il vérifie:

- (X, \mathcal{O}) est séparé.
- De tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un recouvrement fini. (C.a.d si

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

alors il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini tel que

$$X = \bigcup_{i \in I_0} U_i).$$

On a la définition équivalente suivante:

Définition (Proposition) On dira que (X, O) est un espace topologique compact si il vérifie:

- (X, O) est séparé.
- De tout famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermé vérifiant

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset,$$

on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide. (C.a.d que l'on peut trouver $I_0 \subset I$ de cardinal fini et tel que

$$\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset)$$

Démonstration Soit $(F_i)_{i \in I}$ une suite de fermé d'intersection vide. Alors, on a

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c = \emptyset^c = X.$$

$(F_i^c)_{i \in I}$ est donc un recouvrement ouvert de X . On peut alors en extraire un recouvrement fini. Soit donc $I_0 \subset I$ de cardinal fini tel que

$$\bigcup_{i \in I_0} F_i^c = X.$$

En repassant au complémentaire, on trouve l'égalité voulue:

$$\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset.$$

Corollaire Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X compact alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Démonstration Il suffit de prendre la contraposée de la proposition précédente et de l'adapter à notre cas de figure ($I = \mathbb{N}$): Si pour une famille $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermé, on a pour toute partie finie I_0 de \mathbb{N} :

$$\bigcap_{i \in I_0} F_i \neq \emptyset$$

(ce qui est vrai ici car $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\bigcap_{i \in I_0} F_i = F_{i_0}$$

ou $i_0 = \sup\{i \in I_0\}$) alors on a

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$$

Exemple Les intervalles fermés et bornés de \mathbb{R} sont des espaces compacts pour la topologie définie par la valeur absolue.

3 Suites dans un espace compact

Nous allons voir ici une application fondamentale aux espaces métriques du corollaire précédent.

On a vu, dans le cas des espaces métriques, la propriété suivante:

Proposition Si (X, d) est un espace métrique, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de X et x est un point de X , on a l'équivalence suivante:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet x comme point d'accumulation \Leftrightarrow On peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite convergeant vers x .

Théorème Toute suite d'un espace métrique compact possède un point d'accumulation.

Démonstration En effet, on a vu dans le cours sur les espaces métriques que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donné par

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\{x_n; n > i\}}.$$

Posons

$$F_i = \overline{\{x_n; n > i\}}_{i \in \mathbb{N}}.$$

La famille F_i est bien une suite décroissante de fermés non vides. Et donc, par application de la proposition précédente, l'intersection de tous les éléments de cette famille est non vide. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est par conséquent non vide. Cqfd.

Remarque On pourrait se poser le problème de la réciproque. Donnons nous (X, O) un espace ayant la propriété: De toutes suites de X , on peut extraire une sous-suite convergente. Peut on alors affirmer que (X, O) est compact? La réponse, dans le cas métrique, est positive et est donnée par le Théo. de Bolzano-Weierstrass.

4 Sous espaces compacts

On suppose dorénavant que (X, O) est un espace séparé.

Définition On dit d'un **sous ensemble** de (X, \mathcal{O}) qu'il est **compact** s'il est compact pour la topologie induite de celle de X .

Remarque Afin de simplifier l'utilisation des sous espaces compacts, on donne la caractérisation suivante:

Proposition On a équivalence entre:

- K est un sous espace compact de X .
- Pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X tel que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini tel que

$$K \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i.$$

Démonstration Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X , alors $(U_i \cap K)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de K pour la topologie induite de X sur K . Si K est compact, et que $(U_i \cap K)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K , on peut en extraire un recouvrement fini et on aura nécessairement

$$K \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$$

où I_0 désigne une sous partie finie de I . Réciproquement, si pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ vérifiant

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

on peut extraire une sous famille finie recouvrant K alors cela prouve que pour toute famille d'ouvert de K (pour la topologie induite de X sur K) et recouvrant K , on peut extraire une sous famille finie recouvrant K . K est donc compact pour la topologie induite.

On comprendra la nécessité de supposer qu'un espace compact est un espace séparé en étudiant la proposition suivante.

Théorème Tout compact est fermé.

Démonstration Soit K un compact de X . (On peut avoir $K=X$). Montrons que K^c est ouvert. Si $K^c = \emptyset$ alors la démonstration est terminée. Sinon soit $x \in K^c$. Comme X est un espace séparé, pour tout y dans K , on peut trouver un ouvert $O_{x,y}$ contenant x et un ouvert O_y contenant y tel que $O_{x,y} \cap O_y = \emptyset$. Mais on a l'inclusion

$$K \subset \bigcup_{y \in K} O_y.$$

La famille $(O_y)_{y \in K}$ définit donc un recouvrement ouvert de K . De ce recouvrement, on peut extraire un recouvrement fini $(O_{y_i})_{i \in 1..n}$. Posant

$$O = \bigcap_{i=1}^n O_{x,y_i}$$

(qui est ouvert comme intersection finie d'ouverts), on construit un ouvert de O contenant x et disjoint de K . On montre ainsi bien que K^c est ouvert et donc que K est fermé.

Théorème Tout fermé dans un compact est compact.

Démonstration Soient F un fermé et K un compact de X contenant F . Soit aussi $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts (ouverts pour la topologie de K) dont la réunion contient K . La famille $\{F^c\} \cup \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement ouvert de K . On peut donc en extraire un recouvrement fini de K $(U_i)_{i \in I_0}$ ou I_0 est une partie finie de I . Mais alors

$$F \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i,$$

et F est compact Cqfd.

Proposition

- Une réunion finie de sous espaces compacts est compacte.
- Une intersection quelconque de sous espaces compacts est compacte.

Démonstration

- Soit $(K_i)_{i \in 1..n}$ une famille finie de sous espaces compacts. Soit K la réunion des éléments de cette famille et $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de K . Pour tout $i=1..n$, $(U_j \cap K_i)_{j \in J}$ est donc un recouvrement ouvert de K_i . Mais comme chaque K_{i_0} est compact, pour tout $i_0=1..n$, on peut trouver un sous-ensemble fini J_{i_0} de J tel que K_{i_0} soit recouvert par la famille finie d'ouverts $(U_j \cap K_i)_{j \in J_{i_0}}$. Mais la famille $\{U_j; j \in J_{i_0}; i_0 = 1..n\}$ est finie, extraite de la famille $(U_j)_{j \in J}$ et recouvre K . D'un recouvrement quelconque de K , on a extrait un recouvrement fini et on a ainsi bien montré que K est compact.
- Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous espaces compacts. Cette fois ci K désignera l'intersection des éléments de cette famille. Remarquons tout d'abord que K est fermé comme intersection quelconque de fermés. De plus, pour tout i dans I , K est inclus dans K_i . Donc K est un sous ensemble fermé d'un espace compact. C'est donc un espace compact.

5 Continuité et compacité

Théorème fondamental L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Démonstration Soient K un compact de (X, \mathcal{O}) , (Y, \mathcal{O}') un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application continue de X dans Y . Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$ (pour la topologie induite sur $f(K)$...). On a donc

$$f(K) = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Rappelons que si A et B désignent deux ensembles quelconques de Y alors

$$f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Alors

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

Mais f étant continue, chaque $f^{-1}(U_i) \cap K$ est un ouvert de K (pour la topologie induite de X sur K). Comme K est compact, on peut extraire de la famille $(f^{-1}(U_i) \cap K)_{i \in I}$ un recouvrement fini de K $(f^{-1}(U_i) \cap K)_{i \in I_0}$ (où I_0 est une sous partie finie de I). On a alors, comme

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B),$$

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(U_i) \cap K\right) \subset \bigcup_{i \in I_0} f(f^{-1}(U_i) \cap K) \subset \bigcup_{i \in I_0} f(f^{-1}(U_i)) \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i.$$

Et donc, du recouvrement initial de $f(K)$, on a extrait un recouvrement fini, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.

Remarque Si f est un homéomorphisme de (X, \mathcal{O}) dans (Y, \mathcal{O}') et que X est compact, il en est de même de Y .