

# Espaces vectoriels

## 1 Introduction

Jusqu'à la fin du lycée, les mathématiques ( l'analyse comme la géométrie ) se pratiquent dans des espaces de dimension 2 ou 3 ( le plan ou l'espace physique). Très vite apparaît la nécessité de travailler dans des espaces de dimension supérieure, ne serait-ce que pour modéliser des problèmes faisant intervenir un nombre de variables plus grand que 2. Les espaces de dimension plus grande que 3 échappent totalement à la perception. Même si on peut, par projection sur  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ , entrevoir l'aspect d'objets mathématiques vivants dans  $\mathbb{R}^4$  ou plus, on ne peut les visualiser dans toute leur globalité. Aussi faut il un cadre théorique pour pouvoir aborder les dimensions plus grandes. La théorie des espaces vectoriels a pour objet de fixer cette théorie.

## 2 Définitions

**Définition** Soient  $A$  et  $B$  des ensembles. On appelle **loi externe** sur  $B$  une application  $\theta : A \times B \rightarrow B$ . Par convention, si  $\alpha \in A$  et  $x \in B$ , on notera  $\theta(\alpha, x) = \alpha x$ .

**Définition** Soit  $(k, +, \cdot)$  un corps et soit  $(E, +)$  un groupe abélien. Soit aussi  $\theta : k \times E \rightarrow E$  une loi externe sur  $E$  ( on utilisera la convention d'écriture précédente). Le triplet  $(E, +, \cdot)$  a **une structure d'espace vectoriel sur  $k$**  ( ou de  **$k$ -espace vectoriel**) si:

- 1 désignant l'unité de la seconde loi de  $k$  et  $\forall x \in E: 1 \cdot x = x$ .
- $\forall \alpha \in k, \forall x, y \in E \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
- $\forall \alpha, \beta \in k, \forall x \in E (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
- $\forall \alpha, \beta \in k, \forall x \in E (\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$ .

$k$  est appelé le **corps de base** de l'espace vectoriel  $E$ .

**Remarque** Par abus d'écriture, on notera  $E$  le  $k$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ .

**Définition** Soit  $k$  un corps. Un élément d'un  $k$ -espace vectoriel est appelé un **vecteur**.

**Proposition** Soit  $k$  un corps. Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. On note  $0$  le neutre de la loi  $+$  sur  $k$ ,  $0$  aussi le neutre de la loi  $+$  sur  $E$  et  $1$  le neutre de la loi  $\cdot$  sur  $k$ . Soient  $v \in E$  et  $\alpha \in k$ . On a les propriétés suivantes:

1.  $0v = 0$
2.  $-1v = -v$
3. Si  $\alpha v = 0$  et que  $\alpha \neq 0$  alors  $v = 0$ .

**Démonstration**

1. On a:  $v+0v=(1+0)v=v$ . En soustrayant  $v$  des deux côtés de cette égalité, on obtient  $0v=0$ .
2.  $0=0v=(1-1)v=1v+-1v=v+-1v$ .  $-1v$  est donc l'opposé de  $v$ .  $-1v$  est alors égal à  $-v$ .
3. Si  $\alpha v=0$  et que  $\alpha \neq 0$  alors  $\alpha^{-1}$  existe dans  $k$ . On peut multiplier les deux membres de notre égalité de départ par  $\alpha^{-1}$ . Cela donne  $v=\alpha^{-1}.0=0$ .

**Définition** Soit  $k$  un corps et  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $V$  un sous ensemble de  $E$ .  $V$  est un **sous espace vectoriel** de  $E$  si:

- $(V,+)$  est un sous groupe de  $(E,+)$ .
- Si  $\alpha \in k$  et si  $x \in V$  alors  $\alpha x \in V$ .

**Proposition** Soit  $k$  un corps. Un sous espace vectoriel d'un  $k$ -espace vectoriel est un  $k$ -espace vectoriel.

**Démonstration** Il suffit de vérifier les axiomes définissant les  $k$ -espaces vectoriels.

**Proposition** Soient  $k$  un corps,  $E$  un  $k$  espace vectoriel et  $V$  un sous ensemble de  $E$ .  $V$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $\forall \alpha, \beta \in k, \forall x, y \in V, \alpha x + \beta y \in V$ .

**Démonstration** Le sens direct est évident. Pour la réciproque, il suffit de vérifier les deux points de la proposition précédente. Prenons, pour cela,  $x \in V$  et  $\alpha \in k$ . Posons  $\beta = -\alpha$  et  $y = x$ . Le vecteur  $\alpha x + \beta y$ , qui est élément de  $V$ , est égale au vecteur  $\alpha x - \alpha x$  qui est égale au vecteur nul. On en déduit que  $0 \in V$ . D'autre part, en prenant cette fois ci  $\alpha = 1$ , et  $\beta = -1$ , on a  $\alpha x + \beta y = 1x - 1y = x - y$ . Le premier vecteur de cette série d'égalité est élément de  $V$ , il en est alors de même de  $x - y$ . Nous venons ainsi de vérifier que  $(V,+)$  était un sous groupe de  $(E,+)$ . Terminons en remarquant que si  $\alpha \in k, \beta = 0$  et que  $x, y \in V$ , alors le vecteur  $\alpha x + \beta y$  est élément de  $V$ . Mais il est égal à  $\alpha x$ . Donc  $\alpha x$  est élément de  $V$ , cqfd.

### 3 Familles libres, familles génératrices

Dans toute cette section,  $k$  désigne un corps.

**Définition** Soit  $I$  un ensemble et soit  $A = \{\lambda_i; i \in I\}$  une partie de  $k$  indexée par  $I$ . On dit que  $A$  est à **support fini** si l'ensemble des éléments  $i$  de  $I$  tels que  $\lambda_i$  est non nul est de cardinal fini.

**Définition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $A$  une partie de  $E$ . On suppose que  $A = \{x_i; i \in I\}$  où  $I$  est un ensemble permettant d'indexer  $A$ . On appelle **combinaison**

linéaire des éléments de A tout élément de E donné par

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

où  $\{\lambda_i; i \in I\}$  est une famille à support fini de scalaires de k.

**Remarque** Comme la famille des  $\lambda_i$  est à support fini, il n'y a pas de problème de convergence de la somme précédente.

**Définition - Proposition** Soit E un k-espace vectoriel. Soit A un sous ensemble de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A est un sous espace vectoriel de E appelé **sous espace vectoriel de E engendré par A**. On notera  $\text{Vect}(A)$  le sous espace vectoriel engendré par A. De plus, si  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on notera  $\text{Vect}(A) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

**Démonstration** Soient x et y deux éléments de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'éléments de A. Il existe donc des scalaires  $\lambda_i$  et  $\alpha_i$  de k pour tout  $i \in I$ , tels que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \text{ et } y = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i.$$

Soient  $\lambda$  et  $\alpha \in k$ . Le vecteur  $\lambda x + \alpha y$  s'écrit

$$\lambda x + \alpha y = \sum_{i \in I} \lambda \cdot \lambda_i x_i + \alpha \cdot \alpha_i x_i$$

qui est encore une combinaison linéaire d'éléments de A.  $\lambda x + \alpha y$  est donc élément du sous espace vectoriel engendré par A et cela permet de conclure.

**Proposition** Soit A une partie d'un k-espace vectoriel E. Le sous espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient A.

**Démonstration** Tout sous espace vectoriel contenant A contient toute combinaison linéaire de vecteurs de A. Donc le sous espace vectoriel engendré par A est inclus dans tout sous espace vectoriel contenant A.

**Définition** Soit E un k-espace vectoriel. Soit aussi V un sous espace vectoriel de E ( qui peut éventuellement être égal à E). Soient A une famille de vecteurs de V. Cette famille est une **partie génératrice de V** ou **génératrice dans V** si l'espace vectoriel engendré par A est égal à V, ou autrement dit si  $\text{Vect}(A) = V$ . On dit encore que A **engendre V**.

**Définition** Soit A une partie de E un espace vectoriel sur k. Indexons les éléments de A par l'ensemble I. A est appelée **partie libre de E** ou **famille indépendante de vecteurs de E** si pour tout sous ensemble à support fini  $\{\lambda_i; i \in I\}$  de k, l'égalité

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

implique que  $\lambda_i = 0 \forall i = 0$ .

Dans le cas contraire la partie A est dite **partie liée dans E** ou **famille dépendante de vecteurs de E**.

**Proposition** Si E est un k-espace vectoriel et que A est une partie liée de vecteurs de E alors l'un des vecteurs de cette partie s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de A.

**Démonstration** Soit A la partie liée dans E considéré et soit I un ensemble permettant d'indexer cette partie. Posons  $A = \{x_i; i \in I\}$ . La partie A est liée dans E. On peut donc trouver un sous ensemble  $\{\lambda_i; i \in I\}$  de scalaire de k non tous nuls tels que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Soit  $i_0 \in I$  tel que  $\lambda_{i_0} \neq 0$ . L'égalité précédente peut se ré-écrire:

$$\lambda_{i_0} x_{i_0} = - \sum_{i \in I, i \neq i_0} \lambda_i x_i,$$

soit en multipliant à droite et à gauche par  $\lambda_{i_0}^{-1}$ :

$$x_{i_0} = - \sum_{i \in I, i \neq i_0} \lambda_{i_0}^{-1} \lambda_i x_i = 0.$$

On a ainsi bien écrit un des vecteurs de A comme combinaison linéaire des autres vecteurs de A.

## 4 Base d'un espace vectoriel

k désigne un corps.

**Définition** Soit E un k-espace vectoriel. Soit I un ensemble et soit  $A = \{x_i; i \in I\}$  une famille d'éléments de E. Cette famille est **une base de E** si elle est à la fois libre dans E et génératrice de E tout entier. On notera généralement les bases sous la forme d'une suite de vecteurs:  $(x_i)_{i \in I}$ .

**Définition** Soit E un k-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille  $\{x_i; i \in I\}$  est dite:

- **libre maximale** dans E si elle est libre dans E et que pour tout vecteur y de E différent de  $x_i \forall i \in I$ , la famille  $\{x_i; i \in I, y\}$  est liée dans E.
- **génératrice minimale** si elle engendre E tout entier et si, quand on la prive d'un de ses éléments, elle n'engendre plus E.

**Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $I$  un ensemble et  $A = \{x_i; i \in I\}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On a équivalence entre:

1.  $A$  est une base de  $E$ .
2.  $A$  est libre maximale dans  $E$ .
3.  $A$  est génératrice minimale dans  $E$ .

**Démonstration** Montrons  $1 \Rightarrow 2$ : Soit  $A = \{x_i; i \in I\}$  une base de  $E$ .  $A$  est donc libre et génératrice dans  $E$ . Montrons qu'elle est libre maximale. Soit  $y$  un vecteur de  $E$  qui n'est pas élément de  $A$ . Comme  $A$  est une base de  $E$ ,  $A$  engendre  $E$  et on peut toujours trouver une famille à support fini  $\{\lambda_i; i \in I\}$  de scalaires de  $k$  tels que

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

La combinaison linéaire  $y - \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  est donc nulle alors que ses coefficients ne le sont pas tous. Ceci implique que la famille définie par  $\{y\} \cup \{x_i; i \in I\}$  est liée et ce quelque soit  $y$  dans  $E$ . La famille  $\{x_i; i \in I\}$  n'est donc incluse dans aucune famille libre plus grande qu'elle même. Elle est donc bien libre maximale.

Montrons maintenant la réciproque, c'est à dire que  $2 \Rightarrow 1$ . Soit  $\{x_i; i \in I\}$  une famille libre maximale dans  $E$ . Nous devons montrer qu'elle est génératrice. C'est à dire que si  $x$  est un vecteur de  $E$ , alors  $x$  s'écrit comme combinaison linéaire des  $x_i$ . Prenons donc un vecteur  $x$  de  $E$ . Comme  $\{x_i; i \in I\}$  est libre maximale dans  $E$ , la famille  $\{x\} \cup \{x_i; i \in I\}$  est liée dans  $E$ . Cela signifie qu'il existe une famille à support fini  $\{\lambda\} \cup \{\lambda_i; i \in I\}$  de scalaires de  $k$  non tous nuls tels que

$$\lambda x + \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0.$$

Si  $\lambda = 0$  alors cela implique que la famille  $\{x_i; i \in I\}$  n'est pas libre dans  $E$ .  $\lambda$  est donc inversible et on peut écrire:

$$x = \lambda^{-1} \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Comme  $x$  est quelconque dans  $E$ , la famille  $\{x_i; i \in I\}$  est bien génératrice dans  $E$ . Montrons que  $1 \Rightarrow 3$ . Soit  $A = \{x_i; i \in I\}$  une base de  $E$ .  $A$  est donc génératrice. Montrons que  $A$  est génératrice minimale. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un vecteur  $x_{i_0}$  de  $A$  qui est combinaison linéaire des autres éléments de  $A$ .  $A$  ne peut alors être libre.  $A$  est donc nécessairement génératrice minimale.

Montrons enfin que  $3 \Rightarrow 1$ . Considérons une famille  $A = \{x_i; i \in I\}$  de vecteurs de  $E$ . Supposons que cette famille est génératrice minimale et montrons que c'est une base de  $E$ . Il faut vérifier que  $A$  est une famille libre. Si ce n'est pas le cas, il existe  $\{\lambda_i; i \in I\}$  une famille à support fini de scalaires de  $k$  telle que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

et telle que les  $\lambda_i$  ne sont pas tous nuls. Soit  $i_0 \in I$  tel que  $\lambda_{i_0} \neq 0$ . On peut écrire  $x_{i_0}$  en fonction des vecteurs  $x_i$ ,  $i \neq i_0$ . Par conséquent, comme tout vecteur de  $E$  s'écrit en fonction de  $A$ , tout vecteur de  $E$  s'écrit en fonction de  $A \setminus \{x_{i_0}\}$ . Ainsi,  $A$  n'est pas génératrice minimale dans  $E$ . Cela est contraire à notre hypothèse de départ. Donc  $A$  est bien une base de  $E$ .

**Définition - Proposition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Pour un élément  $x$  de  $E$  il existe une unique famille à support fini  $\{\lambda_i; i \in I\}$  de scalaire de  $k$  telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i.$$

Le scalaire  $\lambda_i$  s'appelle **la  $i$ ème coordonnée du vecteur  $x$  relativement à la base  $(e_i)_{i \in I}$** .

**Démonstration** Comme  $(e_i)_{i \in I}$  engendre  $E$ , il existe une famille à support fini  $\{\lambda_i; i \in I\}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ . Supposons qu'il existe une seconde famille à support fini  $\{\alpha_i; i \in I\}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ . Alors  $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \alpha_i) e_i = 0$ . Mais la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est libre dans  $E$ . La seule possibilité pour l'égalité précédente est que  $\lambda_i - \alpha_i = 0 \forall i \in I$ . Soit encore  $\lambda_i = \alpha_i \forall i \in I$ . Cela établit bien l'unicité des coordonnées de  $x$  relativement à une base de  $E$ .

## 5 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition** Soit  $k$  un corps et  $E$  un  $k$ -espace vectoriel.  $E$  est un  $k$ -espace vectoriel de **dimension finie** si il possède une famille génératrice de cardinal fini. Dans le cas contraire,  $E$  est dit de **dimension infinie**.

**Proposition** Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $k$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie. Alors  $E$  possède une base. De plus cette base est de cardinal fini.

**Démonstration** Comme  $E$  est de dimension finie, il possède une famille génératrice finie  $A = \{e_1, \dots, e_n\}$ .  $A$  étant de cardinal fini, on peut extraire de  $A$  la plus petite partie de  $A$  qui soit génératrice de  $E$ . Nommons  $A'$  cette sous partie de  $A$ .  $A'$  est alors génératrice minimale. C'est donc une base de  $E$ .  $A'$  est clairement de cardinal fini.

**Remarque** On commence à s'en douter: dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal. Ce cardinal sera appelé la **dimension** de l'espace vectoriel. Le lemme qui suit a pour objet de préparer la démonstration de cette propriété.

**Lemme** Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $k$ . Soient  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs de  $E$  formant une base de  $E$ . Soient aussi  $v_1, \dots, v_m$  des vecteurs de  $E$ . Supposons que  $m > n$ .

Alors  $v_1, \dots, v_m$  forme une famille liée de vecteurs de  $E$ .

**Démonstration** Raisonnons par l'absurde et supposons que la famille  $v_1, \dots, v_m$  est libre dans  $E$ . Comme  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$  engendre  $E$ , on peut trouver des coefficients  $\lambda_i \in k$  pour  $i=1, \dots, n$  tels que  $v_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ .  $v_1$  étant non nul, on peut supposer, quitte à re-indexer les différents termes de la somme, que  $\lambda_1 \neq 0$ . On est alors en droit d'écrire:

$$\lambda_1 e_1 = v_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i.$$

Soit encore:

$$e_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_1^{-1} \lambda_i e_i.$$

Nous venons en fait de mettre  $e_1$  sous la forme  $e_1 = \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i e_i$  où  $\alpha_i \in k$ . Mon-

trons par récurrence que  $\forall l=1, \dots, m \exists \beta_1, \dots, \beta_l \in k$  tels que  $e_l = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_l v_l + \sum_{i=l+1}^n \beta_i e_i$ .

Cela revient à montrer que  $e_l \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_l, e_{l+1}, \dots, e_n)$ . Supposons cette propriété vraie à l'ordre  $l$  et montrons la à l'ordre  $l+1$ . On sait que  $v_{l+1} \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  mais  $\forall i=1, \dots, l$   $e_i \in \langle v_1, \dots, v_i, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$ . Autrement dit  $\forall i=1, \dots, l$   $e_i \in \langle v_1, \dots, v_l, e_{l+1}, \dots, e_n \rangle$ . On peut donc trouver des coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  tels que  $v_{l+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l + \alpha_{l+1} + \dots + \alpha_n e_n$ . On peut de plus supposer que l'un des coefficients  $\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n$  est non nul. Si cela n'était pas le cas alors la famille  $v_1, \dots, v_{l+1}$  serait liée dans  $E$ , ce qui est contraire à notre hypothèse de récurrence. Supposons, quitte à re-indexer les  $e_i$  que  $\alpha_{l+1}$  est non nul. On a alors:

$$\alpha_{l+1} e_{l+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l - \sum_{i=l+1}^n \alpha_i e_i.$$

En multipliant chacun des membres de cette égalité par  $\alpha_{l+1}^{-1}$ , on obtient une écriture de  $e_{l+1}$  de la forme:

$$e_{l+1} = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_l v_l - \sum_{i=l+1}^n \gamma_i e_i.$$

où  $\gamma_i$  est élément de  $k \forall i=1, \dots, n$ . Ceci termine notre récurrence. Mais comme  $n > m$ , chaque  $e_m$  s'écrit:  $e_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$  où  $\alpha_i \in k \forall i=1, \dots, n$ . On déduit de cela que pour tout  $i=1, \dots, n$ ,  $e_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ . Mais comme  $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ,  $v_p$  est lié à la famille  $\{ v_i \mid i=1, \dots, n \}$  si  $p > n$ . Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ et prouve la proposition.

On peut maintenant formuler et démontrer le théorème fondamental suivant:

**Théorème** Soit  $k$  un corps et soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Si  $E$  est de dimension finie alors toutes les bases de  $E$  ont même cardinale.

**Démonstration** Comme  $E$  est de dimension finie,  $E$  possède au moins une base. Supposons qu'il en existe deux et montrons qu'elles ont même cardinal. Soient  $e = (e_1, \dots, e_n)$  et  $f = (f_1, \dots, f_m)$  deux bases de  $E$ . Supposons que  $m > n$ . Comme  $e$  est une base de  $E$ , on peut appliquer le lemme précédent. Par conséquent  $f$  est liée. Ceci est impossible car  $f$  est une base de  $E$ . Donc  $m \leq n$ . En faisant le même raisonnement en permutant le rôle de  $e$  et celui de  $f$ , on obtient  $n \leq m$ . On est alors en droit d'écrire:  $n = m$ .

Ce théorème démontré, la définition suivante a un sens.

**Définition** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $k$ . Si  $E$  est réduit à son élément nul alors on dit que la dimension de  $E$  est 0. Sinon, on appelle **dimension de  $E$**  et on note  $\dim E$ , le cardinal d'une base de  $E$ .

Le théorème suivant est aussi vrai pour un  $k$ -espace vectoriel de dimension infinie. La démonstration cependant nécessite l'usage de l'axiome de choix. Nous nous y intéresserons dans le paragraphe "Espaces vectoriels de dimension infinie".

**Théorème de la base incomplète** Soient  $k$  un corps et  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $k$ . Soit  $n = \dim E$  et soit  $e = (e_1, \dots, e_m)$  une famille libre de  $E$ . On suppose que  $m < n$ . On peut alors trouver des vecteurs  $f_{m+1}, \dots, f_n$  dans  $E$  tels que  $(e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_n)$  soit une base de  $E$ . On dit qu'on a complété la famille  $e$  en une base de  $E$ .

**Démonstration** Comme  $e$  n'engendre pas  $E$ , on peut trouver un vecteur  $f_1$  dans  $E$  tel que  $f_1$  n'est pas élément de  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ . La réunion  $e \cup \{f_1\}$  forme donc une famille libre de  $E$ . Si cette nouvelle famille est génératrice de  $E$ , alors c'est une base de  $E$  et  $m+1 = n$ . Le théorème est démontré. Si ce n'est pas le cas, on recommence le processus. On construit ainsi des vecteurs  $f_{m+1}, \dots, f_{m+l}$ . Ce processus s'arrête nécessairement quand  $m+l = n$ . (Sinon on construit une famille libre de cardinal plus grand que la dimension de  $E$ ).

## 6 Sous espace vectoriel, sous espaces supplémentaires et somme directe de sous espaces vectoriels

$k$  désigne un corps. Rappelons qu'un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$  est un espace vectoriel pour la loi interne et la loi externe induites de  $E$ .

**Définition** Soit  $E$  un  $k$  espace vectoriel et soit  $V$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Une **base du sous espace vectoriel  $V$**  est une base de  $V$  en tant qu'espace vectoriel.

**Définition** On dit qu'un **sous espace vectoriel est de dimension finie** si il est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par une famille de cardinal fini.

Remarquons que si un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel est de dimension finie alors ce sous espace possède des bases et que toutes ces bases ont même cardinal.

**Définition** La dimension d'un sous espace vectoriel de dimension finie est le cardinal d'une base de ce sous espace vectoriel.

**Définition** Soient  $V$  et  $V'$  deux sous espaces vectoriels du  $k$ -espace vectoriel  $E$ . On note  $V+V'$  l'ensemble somme de ces deux sous espaces vectoriels  $V$  et  $V'$ :

$$V + V' = \{v + v'; v \in V, v' \in V'\}.$$

**Proposition** Si  $V$  et  $V'$  sont deux sous espaces vectoriels du  $k$ -espace vectoriel  $E$  alors  $V+V'$  est aussi un sous espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration** C'est facile, il suffit de vérifier que si  $x$  et  $y$  sont éléments de  $E$  alors il en est de même de  $x-y$ .

**Définition** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et soient  $V$  et  $V'$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $V$  et  $V'$  sont en **somme directe** si  $V \cap V' = \{0\}$ . On note  $V \oplus V'$  le sous espace somme de deux sous espaces supplémentaires.

**Définition** Soient  $V$  et  $V'$  deux sous espaces vectoriels du  $k$ -espace vectoriel  $E$ . On suppose que  $V$  et  $V'$  sont en somme directe dans  $E$  et que  $V \oplus V' = E$  alors  $V$  et  $V'$  sont dit **supplémentaires** dans  $E$ .  $V$  est un **supplémentaire de  $V'$**  dans  $E$ .

Le théorème suivant est énoncé et démontré dans ce paragraphe dans le cadre de la dimension finie. Il est cependant encore vrai en dimension infinie mais la démonstration nécessite l'utilisation de l'axiome de choix. Celle ci sera établie dans le paragraphe "espace vectoriel de dimension infinie".

**Théorème** Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $V$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors  $V$  possède un sous espace supplémentaire dans  $E$ .

**Démonstration** Soit  $n = \dim E$ . Comme  $V$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , il est aussi de dimension finie. Posons  $k = \dim V$ . Soient  $e_1, \dots, e_k$  des vecteurs de  $V$  qui définissent une base de  $V$ . Cette famille, libre dans  $V$ , l'est aussi dans  $E$ . L'utilisation du théorème de la base incomplète nous permet d'être assuré de l'existence de  $n-k$  vecteurs  $e_{k+1}, \dots, e_n$  tels que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  forme une base de  $E$ . Soit  $V'$  le sous espace vectoriel engendré par  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . Il est clair que  $V \cap V' = \{0\}$  et que  $V + V' = E$ .  $V'$  est donc bien un sous espace supplémentaire au sous espace  $V$ .

**Théorème** Si  $V$  et  $V'$  sont deux sous espaces vectoriels de dimension finie du  $k$ -espace vectoriel  $E$  alors  $\dim V + \dim V' = \dim (V + V') + \dim V \cap V'$

**Démonstration** Remarquons que  $V \cap V'$  est un sous espace vectoriel de  $V$  et de  $V'$ . Posons  $m = \dim V$ ,  $m' = \dim V'$  et  $k = \dim V \cap V'$ . Soit aussi  $(e_1, \dots, e_m)$  une base de  $V$ , que l'on complète en une base  $(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_m)$  de  $V$  et en une base  $(e_1, \dots, e_k, f'_{k+1}, \dots, f'_m)$  de  $V'$ . La famille  $\{e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_m, f'_{k+1}, \dots, f'_m\}$  est donc une base de  $V + V'$ . On peut alors écrire les égalités:  $\dim(V + V') = k + m - k + m' - k = m + m' - k = \dim V + \dim V' - \dim V \cap V'$ .

### Définition

- Un sous espace vectoriel de dimension un est appelé une **droite vectorielle**.
- Un sous espace vectoriel de dimension un est appelé une **plan vectoriel**.

**Définition** Soit  $p$  un entier positif. On appelle **rang d'un système de vecteurs**  $v_1, \dots, v_p$  de l'espace vectoriel  $E$  la dimension de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ .

Comme les vecteurs  $v_1, \dots, v_p$  sont en nombre fini, la dimension du sous espace vectoriel qu'ils engendrent est nécessairement de dimension finie. La définition est donc correcte.

## 7 Espaces vectoriels de dimension infinie

Comme nous l'avons déjà mentionné, les propriétés d'existence d'un supplémentaire pour un sous espace vectoriel, d'existence d'une base et le théorème de la base incomplète sont vraies en dimension infinie. Nous allons maintenant établir ces 3 propriétés.

**Proposition** Soit  $k$  un corps et  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $V$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Soient aussi  $W_1$  un sous espace vectoriel de  $E$  tel que  $V \cap W_1 = \{0\}$  et  $W_2$  un sous espace vectoriel de  $E$  tel que  $V + W_2 = E$ . Alors il existe un supplémentaire  $W$  de  $V$  contenu dans  $W_2$  et contenant  $W_1$ .

**Démonstration** Considérons l'ensemble  $A$  des sous espaces vectoriels de  $E$  contenant  $W_1$  et contenus dans  $W_2$ .  $A$  n'est pas vide car  $W_1$  est élément de  $A$ .  $A$  est partiellement ordonné par la relation "être inclu dans ou être égal à":  $\subseteq$ . Considérons une partie totalement ordonnée de  $A$ . Considérons ensuite la réunion des éléments de cette partie et notons la  $U$ . Comme la partie est totalement ordonnée, cette réunion est encore un sous espace vectoriel de  $E$  qui contient  $W_1$  et qui est contenu dans  $W_2$ . Cette réunion a comme seul élément commun avec  $V$  le vecteur nul de  $E$ .  $U$  est de plus un majorant de cette partie pour la relation d'ordre donné par l'inclusion.  $A$  est donc un ensemble inductif. Appliquons le lemme de Zorn. Il existe un élément maximal pour  $A$ . Notons le  $W$ .  $W$  vérifie:

1.  $W \cap V = \{0\}$ .
2.  $W_1 \subseteq W \subseteq W_2$ .

3.  $\forall W' \in A, W' \subseteq W$ .

Montrons que  $W$  est un supplémentaire à  $V$ . Au regard de ce que l'on sait déjà, il suffit de prouver que  $V+W=E$ . Soit  $x \in E=V+W$ .  $x$  s'écrit:  $x=v+w_2$  où  $v \in V$  et où  $w_2 \in W$ . Si on trouve  $w \in W$  et  $v' \in V$  tels que  $x=v'+w$  alors c'est gagné. Si  $w_2 \in W$ ,  $w$  est trouvé. Sinon, on considère le sous espace vectoriel  $X$  engendré par  $W$  et  $w_2$ . Ce sous espace vectoriel contient strictement  $W$ . Par conséquent, comme  $W$  est maximale dans  $A$ ,  $X$  n'appartient pas à  $A$ . Mais  $X$  vérifie les points 2 et 3 précédents. Il ne vérifie donc pas le point 1. Cela signifie qu'il existe un vecteur  $y \in X \cap V$ .  $y$  est donc d'une part élément de  $V$  mais a d'autre part une écriture de la forme  $y=w'+\lambda w_2$  où  $\lambda \in k$  et où  $w' \in W$ . Si  $\lambda=0$ , alors  $y$ , élément de  $V$ , est aussi élément de  $W$ . Cela est impossible car  $W \in A$ . Donc  $\lambda \neq 0$ . Alors:  $w_2 = \frac{1}{\lambda}(y-w')$ . Cela donne:  $x=v+\frac{1}{\lambda}y-\frac{1}{\lambda}w'$ . Mais  $v+\frac{1}{\lambda}y \in V$  et  $\frac{1}{\lambda}w' \in W$ . On a bien obtenu la décomposition voulue et notre théorème est démontré.

On peut formuler le corollaire immédiat à ce résultat:

**Corollaire** Soit  $k$  un corps et soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel. Soit  $V$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors  $V$  possède un supplémentaire dans  $E$ .

**Démonstration** C'est immédiat via la proposition précédente.

**Proposition** Soit  $E$  un espace vectoriel (non réduit à  $\{0\}$ ) sur le corps  $k$ .  $E$  possède une base.

**Démonstration** Soit  $A$  l'ensemble de toutes les familles libres de  $E$ .  $A$  est non vide car si  $v$  est un vecteur non nul de  $E$  alors  $\{v\}$  est une famille libre dans  $E$ .  $A$  est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion. Soit  $B$  une partie de  $A$  totalement ordonnée non vide. Alors la réunion des éléments de cette famille est encore un élément de  $A$ . Cette réunion, de plus, est un majorant de  $A$ . Donc  $A$  est inductif.  $A$  possède alors un élément maximal. Notons  $F$  cette famille libre de vecteurs de  $E$  et élément maximal de  $A$ . Cette famille est libre maximale dans  $E$ . C'est par conséquent une base de  $E$ .

**Proposition Théorème de la base incomplète en dimension infinie** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une partie génératrice de  $E$ . Soit  $I'$  un sous ensemble de  $I$  tel que  $(e_i)_{i \in I'}$  est libre dans  $E$ . Alors il existe  $I' \subset I'' \subset I$  tel que  $(e_i)_{i \in I''}$  soit une base de  $E$ .

**Démonstration** Remarquons qu'on a présupposé l'existence de partie génératrice dans  $E$ . Ceci est, d'après la propriété précédente, évident. Considérons cette fois-ci l'ensemble  $A$  des familles libres  $(e_i)_{i \in J}$  avec  $I' \subset J \subset I$ .  $A$  est ordonné partiellement par l'inclusion. Si  $B$  est une partie de  $A$  totalement ordonnée pour l'inclusion, alors la famille réunion des éléments de  $B$  est encore élément de  $A$ . De plus, cette réunion majore  $B$ . On en déduit que  $A$  est inductif. D'après le lemme de Zorn,  $A$  possède un élément maximal. Soit  $I' \subset J \subset I$  tel que  $(e_i)_{i \in J}$  soit l'élément maximal de  $A$ . Cette famille est libre. Montrons qu'elle est aussi génératrice. Il suffit pour cela de remarquer que pour tout vecteur  $e_k$ , avec  $k$  n'appartenant pas à  $J$ , la famille  $(e_i)_{i \in J} \cup \{e_k\}$  est liée dans  $E$ . Par conséquent, comme  $(e_i)_{i \in I}$  engendre  $E$  et que  $(e_i)_{i \in I} \subset \text{Vect}((e_i)_{i \in J})$  alors  $(e_i)_{i \in J}$  en-

genre  $E$ . C'est donc bien une base de  $E$ .