

Etude de l'espace vectoriel k^n - Matrices

1 Introduction

L'attitude du mathématicien face à un problème est souvent d'essayer de déplacer le champs lexical dans lequel est énoncé ce problème pour un autre dans lequel il se démontrera plus aisément.

Considérons par exemple le problème consistant à rechercher les zéros d'une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ce problème peut se résoudre par les moyens algébriques habituels de résolution des équations. Mais cette méthode n'est malheureusement pas toujours assurée du succès. Aussi faudra-t'il peut-être tenter d'autres approches. On pourra par exemple transformer le problème qui consiste à résoudre $f(x)=0$ en celui de trouver le point fixe de $g(x)=f(x)+x$. On passera alors du champs lexical de l'algèbre à celui de l'analyse et des suites réelles. On mettra ainsi les outils de l'analyse à la disposition d'un problème algébrique.

Certaines propriétés qui au départ sont des purs produits d'une théorie donnée n'ont pu être démontrées que dans le cadre d'une autre théorie. Nous pensons par exemple au théorème fondamentale de l'algèbre qui ne possède aucune démonstration qui ne recourt à l'analyse.

Parlons aussi du grand théorème de Fermat. Une des raisons du fait qu'il a résisté aux assauts des plus grands mathématiciens de ces derniers siècles est très certainement que les mathématiques n'étaient pas prêtes jusqu'à encore récemment à l'énoncer dans un langage qui permette sa démonstration. Il a fallu élaborer, entre autre, la géométrie algébrique et développer les théories sur les courbes modulaires et les courbes elliptiques pour pouvoir le démontrer.

C'est d'ailleurs le (seul?) mérite de ce théorème que d'avoir servi à la création d'une nouvelle branche des mathématiques.

Tout cela pour insister sur l'importance de multiplier les représentations pour un objet mathématique donné. L'écriture matricielle consiste justement en une autre représentation des applications linéaires, application dont l'importance a déjà été justifiée dans le chapitre précédent.

Dans tout ce chapitre k désigne un corps. Nous commencerons par une étude de l'ensemble k^n qui est un k -espace vectoriel de dimension n .

2 Etude de l'espace vectoriel k^n

Voici un exemple à la fois simple et fondamental d'espace vectoriel: la multiplication dans le corps k peut être vue comme une loi externe sur $k \times k$ dans k . L'addition dans k est une loi interne. k muni de ces deux lois est un k -espace vectoriel:

Proposition Soit k un corps. Une loi interne est définie sur k par l'addition de k . On peut voir la multiplication sur k comme une loi externe de $k \times k$ dans k . k muni de ces deux lois est un k -espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration On vérifie sans problème les axiomes définissant un espace vectoriel. De plus si on considère l'élément 1 de k . Alors tout élément x de k s'écrit $x = x \cdot 1$. L'élément 1 engendre k sur lui-même. Une famille constituée d'un unique élément non nul est libre. $\{1\}$ définit donc une base de k . k est alors bien de dimension 1 sur lui-même.

Rappelons que k^n est l'ensemble des n -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où α_i parcourt k . Nous allons définir une addition et une loi externe sur k^n et ainsi en faire un k -espace vectoriel de dimension n . L'intérêt d'une telle construction est justifiée par la proposition: Si n est un entier positif, tout k -espace vectoriel de dimension n sont isomorphes. Par conséquent, tout k -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à k^n . k^n nous servira donc d'espace vectoriel de dimension n canonique.

Soient (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) deux éléments de k^n . Soit λ un scalaire de k . On définit l'addition par: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et la multiplication par un scalaire par: $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$. Alors:

Proposition k^n muni de ces deux lois a une structure de k espace vectoriel.

Démonstration Exercice!.

Définition - Proposition Considérons pour tout $i=1, \dots, n$ le vecteur $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ de k^n . Ce vecteur a toutes ses coordonnées nulles sauf la i ème qui vaut 1. La suite de vecteurs $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base de k^n appelée **base canonique de k^n** .

Démonstration Considérons un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de k^n . Il est facile de voir que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

La famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est donc génératrice. De plus si $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n}$ est une famille de n scalaires de k , l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$. Soit $\forall i=1, \dots, n, \lambda_i = 0$. La famille $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est donc libre et génératrice dans k^n . C'est bien une base de k^n .

Un corollaire immédiat:

Corollaire L'espace vectoriel k^n est de dimension n sur k .

Proposition fondamentale Si E est un k -espace vectoriel de dimension n alors E est isomorphe à k^n . De plus si on se fixe une base $(v_i)_{i=1, \dots, n}$ dans E , cet isomorphisme

peut être donné par l'application qui à un vecteur de E associe le n -uplet de ses coordonnées.

Démonstration Soit f l'application définie dans la propriété. f est bien une application de E dans k^n . On vérifie sans problème que f est linéaire. Soit x dans E tel que $f(x)=0$. Alors les coordonnées de x dans la base $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ sont toutes nulles et par conséquent x est le vecteur nul de E . Le noyau de f se réduit donc à $\{0\}$. f est alors injective. Mais comme E et k^n ont même dimension, f est un isomorphisme de E dans k^n .

3 Matrices

Les espaces vectoriels considérés dans cette partie sont tous de dimension finie sur un corps k donné.

Rappelons que la connaissance d'une application linéaire θ sur un espace vectoriel E est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base de E . Ainsi si $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ est une base de E , et si pour tout $i=1,\dots,m$, $\theta(e_i)$ est connue, alors si $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ est un vecteur de E , $\theta(x)$ est donné par :

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^m x_i \theta(e_i).$$

Nommons F l'espace vectoriel d'arrivée de l'application linéaire θ . Supposons que F est de dimension n . On peut choisir une base $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ de F . Il existe des coefficients λ_{ij} pour $i=1,\dots,m$ et $j=1,\dots,n$ tels que pour tout $i=1,\dots,m$,

$$\theta(e_i) = \sum_{p=1}^n \lambda_{pi} f_p.$$

On peut utiliser pour représenter θ le tableau à n lignes et m colonnes suivant, dont la i ème colonne est donnée par les coordonnées du vecteur $\theta(e_i)$ dans la base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \vdots & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

Définition Soit E un k -espace vectoriel de dimension m et F un k -espace vectoriel de dimension n . Soient $e=(e_i)_{i=1,\dots,m}$ une base de E et $f=(f_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de F . Soit aussi θ une application linéaire de E dans F . Pour tout $i=1,\dots,m$, il existe n scalaires λ_{ij}

$i=1, \dots, n$ de k vérifiant $\theta(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} f_i$. On appelle **matrice de θ dans les bases e de E et f de F** le tableau noté $M(\theta, e, f)$ à n lignes et m colonnes constitué des scalaires λ_{ij} de k :

$$M(\theta, e, f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \vdots & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

On dira aussi que $M(\theta, e, f)$ est la **représentation matricielle** de θ dans les bases e et f de E et F . On pourra noter cette matrice sous la forme condensée: $M(\theta, e, f) = (\lambda_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$.
L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes sur le corps k est noté $\mathcal{M}_k(n, m)$.

Remarquons que dans la définition précédente il est écrit **la** représentation matricielle de l'application g et non pas **une** représentation matricielle. La proposition qui suit justifie ce point lexical:

Proposition Soient E et F deux k -espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension m et que F est de dimension n . Soit e une base de E et f une base de F . Soit aussi g une application linéaire de E dans F . g possède une unique représentation matricielle $M(g, e, f)$.

Démonstration C'est une conséquence directe de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base de l'espace auquel il appartient.

4 Structure des ensembles de matrices

Commençons par étendre l'addition des applications linéaires à celle de leur matrices respectives dans des bases données.

Définition Soit k un corps et M, M' deux matrices de $\mathcal{M}_k(n, m)$. On pose $M = (\lambda_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ et $M' = (\lambda'_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$. Soit aussi $\alpha \in k$. On définit une loi interne $+$ (addition) et une loi externe. (multiplication par un scalaire) sur $\mathcal{M}_k(n, m)$ par: $M + M' = (\lambda_{ij} + \lambda'_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ et $\alpha \cdot M = (\alpha \cdot \lambda_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$.

Définition La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_k(n, m)$ est la matrice dont tout les coefficients sont nuls. C'est le neutre de l'addition matricielle.

Proposition $\mathcal{M}_k(n, m)$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire précédemment définies a une structure de k -espace vectoriel.

Démonstration On vérifie sans problème les axiomes définissant un k-espace vectoriel.

Plus précisément:

Proposition $\mathcal{M}_k(n,m)$ est un k-espace vectoriel de dimension $m \times n$. La famille donnée par les $m \times n$ matrices M_{ij} dont les coefficients sont nuls partout sauf le coefficient se trouvant à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne et qui vaut 1 est une base de $\mathcal{M}_k(n,m)$ que l'on appelle base canonique de $\mathcal{M}_k(n,m)$.

Démonstration Démontrons que la famille précédente est libre. Soit λ_{ij} $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$ une famille de mn scalaires de k telle que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} = 0$. Le membre de gauche de cette égalité est égale à la matrice $(\lambda_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ qui, toujours d'après cette égalité est égale à la matrice nulle. Ceci n'est possible que si les λ_{ij} sont nuls pour tout $i=1,\dots,n$ et $j=1,\dots,m$. La famille donnée par les mn matrices M_{ij} est donc libre.

Elle est clairement génératrice car si $M = (\lambda_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ alors $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} M_{ij}$.

Définition - Proposition Soient E et F deux k-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension m et que F est de dimension n. Soit e une base de E et f une base de F. Soit aussi θ et β deux applications linéaires définies de E dans F. A ces deux applications linéaires, on fait correspondre leurs représentations matricielles respectives: $M(\theta, e, f)$ et $M(\beta, e, f)$. Alors $M(\theta, e, f) + M(\beta, e, f) = M(\theta + \beta, e, f)$ et $r.M(\beta, e, f) = M(r.\beta, e, f)$.

Démonstration Il suffit d'écrire...

Considérons maintenant trois k-espaces vectoriels E, F et G de dimensions respectives m, n et p. Considérons aussi une application linéaire f de E dans F et une application linéaire g de F dans G. Rappelons que la fonction $h = g \circ f$ est une application linéaire de E dans G. Si on se donne des bases x de E, y de F et z de G, on aura les représentations matricielles: $M(f, x, y) = (\lambda_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$, $M(g, y, z) = (\beta_{ij})_{i=1,\dots,p, j=1,\dots,n}$ et $M(g \circ f, x, z) = (\alpha_{ij})_{i=1,\dots,p, j=1,\dots,m}$. Quel rapport existe-t-il entre les coefficients de chacune de ces matrices?

Soit $1 \leq s \leq m$ et x_s un vecteur de la base x de E. Alors:

$$f(x_s) = \sum_{i=1}^n \lambda_{is} y_i.$$

De même si $1 \leq t \leq n$ et si y_t est un vecteur de la base y de F,

$$g(y_t) = \sum_{j=1}^p \beta_{jt} z_j.$$

On obtient:

$$g \circ f(x_s) = g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_{is} y_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \lambda_{is} g(y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_{is} \sum_{j=1}^p \beta_{ji} z_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{is} \cdot \beta_{ji} z_j = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ji} \cdot \lambda_{is} \right) z_j \\
&= \sum_{j=1}^p \alpha_{js} z_j.
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\alpha_{js} = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \cdot \lambda_{is}.$$

On aboutit donc à la définition:

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_k(p, n)$ et soit $N \in \mathcal{M}_k(n, m)$ tels que $M = (\alpha_{ij})_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, n}$ et $N = (\beta_{jl})_{j=1, \dots, n, l=1, \dots, m}$. On appelle **produit des deux matrices** M et N la matrice notée M.N ou $MN = (\gamma_{ij})_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, m}$ élément de $\mathcal{M}_k(p, m)$ telle que

$$\gamma_{ij} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lj}.$$

Proposition Soient E, F et G trois k-espaces vectoriels de dimension respective m, n et p. Soit f une application linéaire définie de E dans F et g une application linéaire définie de F dans G. On se fixe des bases α, β, γ de E, F et G. Alors $M(g \circ f, \alpha, \gamma) = M(g, \beta, \gamma) \cdot M(f, \alpha, \beta)$.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la définition du produit matriciel.

Remarquons, avant d'aller plus loin que pour deux matrices A et B, le produit A.B n'a un sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On ne peut donc définir une multiplication sur $\mathcal{M}_k(n, m)$ que si $n=m$, c'est à dire que si le nombre de ligne des matrices de $\mathcal{M}_k(n, m)$ est égal à leur nombre de colonnes.

Définition Si une matrice a autant de ligne que de colonnes, on dit que c'est **une matrice carrée**. Le nombre de ligne (ou de colonnes) d'une matrice carrée est appelée son **ordre**. On notera $\mathcal{M}_k(n)$ l'ensemble des matrices carrés d'ordre n et à coefficients dans k.

Compte tenu de la remarque précédente, des matrices carrées de même ordre sont multipliables entre elles. Intéressons nous à une matrice carrée particulière:

Définition La matrice **unité** de $\mathcal{M}_k(n)$ est la matrice:

$$M(g, e, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que cette matrice est l'élément neutre de la multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_k(n)$. Ajoutons la proposition:

Définition Soit E un k-espace vectoriel de dimension n et soit e une base de E. Rappelons que l'application identique Id sur E est l'application qui à un élément x de E associe lui même. La matrice $M(\text{Id}, e, e)$ est égale à la matrice unité.

Démonstration Il suffit de remarquer que pour tout vecteur e_i $i=1, \dots, n$ de la base e de E, $\text{Id}(e_i)=e_i$.

On peut enfin énoncer la propriété:

Proposition $\mathcal{M}_k(n)$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices précédemment définis a une structure d'anneau unitaire.

Démonstration C'est très facile à vérifier. L'unité de cet anneau est la matrice unité.

Cet anneau n'est de façon général pas commutatif. (Voir l'article "Construction de matrices réelles vérifiant $AB=-BA$ ".

5 $\mathcal{M}_k(n, m)$ et $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition Soit E et F deux k-espaces vectoriels de dimension respective m et n. Alors on a un isomorphisme d'espace vectoriel entre $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_k(n, m), +, \cdot)$. En particulier $\dim \mathcal{L}(E, F) = m \cdot n$

Démonstration Choisissons une base $e=(e_1, \dots, e_m)$ de E et une base $e'=(e'_1, \dots, e'_n)$ de F. Considérons l'application $\theta : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_k(m, n)$ qui à une application linéaire f définie de E dans F associe sa représentation matricielle dans les bases e de E et e' de F: $M(f, e, e')$. Cette application est un homomorphisme du groupe $(\mathcal{L}(E, F), +)$ dans le groupe $(\mathcal{M}_k(m, n), +)$ car si f et g sont éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ alors $M(f, e, e') + M(g, e, e') = M(f+g, e, e')$. De plus, θ est injective: si $\theta(f)=0$ où 0 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_k(m, n)$ alors cela implique que $f(e_i)=0 \forall i=1, \dots, m$. f étant nulle sur une base de E, elle est nulle sur E. f est surjective: si $M=(\alpha_{ij})_{i,j=1, \dots, n} \in \mathcal{M}_k(m, n)$ alors l'application linéaire définie par $f(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e'_j$ pour tout $i=1, \dots, m$ a pour image m par θ . Enfin comme $M(\lambda f, e, e') = \lambda M(f, e, e')$, θ est un homomorphisme d'espace vectoriel. θ est donc bien un isomorphisme. Comme deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension, on en déduit la formule sur la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition Si E est un k -espace vectoriel de dimension n alors on a un isomorphisme d'anneaux unitaires entre $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ et $(\mathcal{M}_k(n), +, \cdot)$.

Démonstration Soit e une base de E . Considérons à nouveau l'application θ précédemment définie qui à un endomorphisme f associe sa représentation matricielle $M(f, e, e)$. On vient de démontrer que θ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{L}(E, E), +)$ sur le groupe $(\mathcal{M}_k(n), +)$. Si f, g sont des endomorphismes de E , les égalités $M(f \circ g, e, e) = M(f, e, e) \cdot M(g, e, e)$ et

$$\theta(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

implique que θ est aussi un homomorphisme d'anneaux unitaires.

Remarquons que l'isomorphisme θ utilisé dans les deux démonstrations précédentes n'est pas canonique dans le sens où il n'est fixé que si des bases de E et F sont données.

6 Les matrices comme applications linéaires

Définition - Proposition Produit d'une matrice et d'un vecteur Soient E et F deux k -espaces vectoriels de dimensions respectives m et n . Choisissons e une base de E et e' une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . Soit aussi $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$. On peut représenter x par le vecteur colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}$$

Supposons que la matrice de f dans les bases e et e' de E s'écrive $M(f, e, e') = (\lambda_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$. Alors le vecteur $f(x)$ dans la base e' a pour coordonnées (y_1, \dots, y_n) où

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \vdots & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}$$

Démonstration Une fois encore, il suffit d'écrire.

Proposition Soit $M \in \mathcal{M}_k(m,n)$ alors M peut être vu, modulo la définition précédente, comme une application linéaire de k^m dans k^n .

Démonstration Soit v et v' deux vecteurs colonnes de k^m . Alors, un petit calcul donne $M(\alpha v + \alpha' v') = \alpha Mv + \alpha' Mv'$, ce qui prouve la linéarité de M .

Cette proposition permet de redémontrer celles sur la structure de $(\mathcal{M}_k(n,m), +, \cdot)$ et de $(\mathcal{M}_k(n), +, \cdot)$. On a l'égalité $\mathcal{M}_k(n,m) = \mathcal{L}(k^m, k^n)$. Ce dernier, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire habituelles, possède une structure de k -espace vectoriel. D'autre part, on se souvient que $(\mathcal{L}(k^n), +, \circ)$ possède une structure d'anneau unitaire. Comme $\mathcal{M}_k(n) = \mathcal{L}(k^n)$, il en est de même de $\mathcal{M}_k(n)$.

Terminons par une définition qui permet de faire la transition avec le paragraphe suivant.

Définition Soit M une matrice de $\mathcal{M}_k(m,n)$. On appelle **rang de la matrice** M le rang de M comme application linéaire de k^m dans k^n .

7 Matrices inversibles - Groupe linéaire

Définition On dira qu'une matrice est **inversible** si elle est inversible comme élément de l'anneau $(\mathcal{M}_k(n), +, \cdot)$.

Remarquons qu'en raison de l'isomorphisme précédemment établi entre $\mathcal{M}_k(n)$ et $\mathcal{L}(E)$ (si E est de dimension n), on a équivalence entre le fait que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme et le fait que la matrice représentant f dans une base de E est inversible.

Définition Le sous ensemble de $\mathcal{M}_k(n)$ des matrices qui sont inversibles est appelé **groupe linéaire** et est noté $\mathcal{G}l_n(k)$.

Remarquons que $\mathcal{G}l_n(k)$ a une structure de groupe car c'est le sous ensemble des éléments inversibles d'un anneau unitaire..

Proposition Soit E un k espace vectoriel de dimension n . Les groupes $\mathcal{G}l_n(k)$ et $\mathcal{G}l(E)$ sont isomorphes.

Démonstration C'est une conséquence directe de l'isomorphisme entre les anneaux $\mathcal{M}_k(n)$ et $\mathcal{L}(E)$.

Terminons par un critère d'inversibilité des matrices.

Proposition Soit M une matrice de $\mathcal{M}_k(n)$. M est inversible si et seulement si M est de rang n .

Démonstration Supposons que M est une matrice inversible. Alors M est inversible en tant qu'élément de l'anneau $(\mathcal{M}_k(n), +, \cdot)$. M peut être vu comme une application linéaire définie de k^n dans k^n . M étant inversible, elle possède une matrice inverse M^{-1} qui peut être vue elle aussi comme une application de k^n dans lui-même. M est donc un isomorphisme de k^n dans lui-même ce qui nous assure que M est de rang n . Réciproquement Si M est de rang n , alors M en tant qu'application linéaire de k^n dans k^n est un endomorphisme de rang n . Les endomorphismes de rang n sont les isomorphismes, c'est à dire les endomorphismes inversibles. On a alors bien démontré notre propriété.

8 Changement de base

On se pose le problème suivant: connaissant les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée d'un espace vectoriel de dimension finie, comment trouver ses coordonnées dans une autre base de cet espace vectoriel.

Définition Soient E un k -espace vectoriel de dimension finie n et soient e et e' deux bases de E . On appelle **matrice de changement de base de la base e vers la base e'** la matrice dont la i ème colonne est formée des coordonnées du vecteur e'_i de la famille e' dans la base e . On notera cette matrice: $M(e', e)$. Cette matrice s'appelle aussi **matrice de passage de la base e à la base e'** .

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension n . Soient e et e' deux bases de E . La matrice de changement de base de la base e à la base e' est inversible.

Démonstration $M(e', e)$ est la représentation matricielle d'un endomorphisme de E qui envoie la base e sur la base e' . Par conséquent cet endomorphisme est un automorphisme et $M(e', e)$ est inversible.

La proposition qui vient justifie le vocabulaire utilisé dans la définition.

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension n . Soient e et e' deux bases de E . Soit x un élément de e de vecteur coordonné $X=(x_1, \dots, x_n)$ dans la base e et de vecteur coordonné $X'=(x'_1, \dots, x'_n)$ dans la base e' . Alors si $M(e', e)$ désigne la matrice de passage de la base e à la base e' : $X'=(M(e', e))^{-1}X$.

Démonstration On a: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$. Notons $M(e', e) = (\alpha_{ij})_{i,j=1, \dots, n} = M$. Le vecteur e_i s'écrit donc: $e_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$. Donc $x = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right) e_i$. En identifiant cette dernière expression avec celle: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on obtient $\forall i = 1, \dots, n$ $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j$. Soit $(x_1, \dots, x_n) = M(x'_1, \dots, x'_n)$. Ou encore $(x'_1, \dots, x'_n) = M^{-1}(x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire Si E est un k -espace vectoriel de dimension finie, que e et e' sont deux bases de E alors $M(e,e').M(e',e)=Id_E$. Autrement dit, la matrice de passage de la base e à la base e' est inversible d'inverse la matrice de passage de la base e' à la base e .

Démonstration Soit x un vecteur de E , X le vecteur colonne représentant x dans la base e et X' celui le représentant dans la base e' . Alors $X'=(M(e',e))^{-1}X$. Mais $X=(M(e,e')^{-1})X'$. Donc $X=(M(e,e'))^{-1}(M(e',e))^{-1}X$. Cela étant vrai pour tout X de k^n , on en déduit $(M(e,e'))^{-1}(M(e',e))^{-1}=Id_E$, soit encore $M(e,e')M(e',e)=Id_E$.

Théorème Formule de changement de base Soit f une application linéaire entre un espace vectoriel E de dimension m et un espace vectoriel F de dimension n . Soient v,v' des bases de E , w,w' des bases de F . Soient encore $M(f,v,w)$ la matrice de f dans les bases v de E , w de F et $M(f,v',w')$ la matrice de f dans les bases v' de E , w' de F . Alors $M(f,v',w')=M(w',w)M(f,v,w)M(v',v)^{-1}$.

Démonstration Soit x un vecteur de E , $X=(x_1,\dots,x_m)$ le vecteur coordonné qui représente x dans la base v , $X'=(x'_1,\dots,x'_m)$ le vecteur coordonné qui représente x dans la base w . Soit y le vecteur de F image de x par f . y peut être représenté par le vecteur coordonné $Y=(y_1,\dots,y_n)$ dans la base w de F et par le vecteur $Y'=X=(y'_1,\dots,y'_n)$ dans la base w' . La proposition précédente amène les relations: $Y'=(M(w',w))^{-1}Y$ et $X'=(M(v',v))^{-1}X$. De plus $Y=M(f,w,v)X$ et $Y'=M(f,w',v')X'$. En utilisant cette deuxième égalité et les deux premières, on obtient: $M(w',w)^{-1}Y=M(f,w',v')(M(v',v))^{-1}X$. Soit encore: $M(w',w)^{-1}M(f,w,v)X=M(f,w',v')(M(v',v))^{-1}X$. Cette égalité est vraie pour tout X dans k^m . Donc $(M(w',w)^{-1})M(f,w,v)=M(f,w',v')(M(v',v))^{-1}$. En multipliant à gauche par $M(v',v)$: $(M(w',w))^{-1}M(f,w,v)M(v',v)=M(f,w',v')$.

Définition Soient M et M' deux matrices éléments de $\mathcal{M}_k(n,m)$. M et M' sont dites **équivalentes** si il existe deux matrices $P \in \mathcal{G}l_n(k)$ et Q de $\mathcal{G}l_m(k)$ tels que $M'=P.M.Q$.

Définition Soient M et M' deux matrices éléments de $\mathcal{M}_k(n)$. M et M' sont dites **semblables** si il existe une matrice P de $\mathcal{G}l_n(k)$ tel que $M'=P^{-1}.M.Q$.

Proposition Soient E et F deux k -espaces vectoriels de dimension respective m et n et soit g une application linéaire de E dans F de rang r . Alors on peut trouver une base e de E et f de F tel que la matrice de g dans ces base soit égale à la matrice donnée par:

$$U_r = \begin{pmatrix} & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \dots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité de k^r . Réciproquement si g possède une telle représentation

matricielle dans des bases e de E et f de F alors g est de rang r .

Démonstration Commençons par le sens direct. E peut être décomposé en la somme directe $\text{Ker } g \oplus E_1$ où E_1 est un sous espace supplémentaire à $\text{Ker } g$ isomorphe au sous espace $\text{Im } g$. De même F peut être décomposé en la somme $F = F_1 \oplus \text{Im } g$ où F_1 est un sous espace de F supplémentaire à $\text{Im } g$. Soit donc $e = (e_1, \dots, e_r)$ une base de E_1 que l'on complète par $n-r$ vecteurs e_{r+1}, \dots, e_n formant une base de $\text{Ker } f$ pour former une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Comme g est de rang r , g envoie cette famille sur les vecteurs $g(e_1), \dots, g(e_r)$ qui forment une base de $\text{Im } f$. Complétons cette base de $\text{Im } f$ par des vecteurs f_{r+1}, \dots, f_n de F_1 afin de former une base f de F . La matrice de F dans les bases e de E et f de F est exactement celle annoncée.

Pour la réciproque il suffit de remarquer que si g possède une telle représentation matricielle dans des bases e de E et f de F alors l'image de g est de dimension r et son rang est donc égal à r .

Corollaire Soient E et F deux k espaces vectoriels. Soient g et g' deux applications linéaires définies de E dans G . On a équivalence entre:

- Le rang de g est égal au rang de g' .
- Les matrices représentant g et g' dans des bases e de E et f de F' sont équivalentes.

Démonstration Supposons pour commencer que g et g' sont de rang égal. Désignons par r ce rang. D'après la proposition précédente, il existe des bases e, e' de E et des bases f, f' de F tels que $M(g, e, f)$ et $M(g', e', f')$ soient égales à la matrice U_r mentionnée précédemment. Si on considère la matrice $M(g', e, f)$ de g' dans les bases e de E et f de F , utilisant la formule de changement de base, on a : $(M(f', f))^{-1} M(g', e, f) M(e', e) = M(g', e', f') = U_r = M(g, e, f)$. On a alors bien établis l'existence d'une base e de E et d'une base f de F telles que les matrices de g et g' dans ces bases soient équivalentes. Réciproquement, si il existe une base e de E et une base f de F telles que les matrices $M(g, e, f)$ et $M(g', e, f)$ soient équivalentes, alors il existe des matrices P, Q de $\mathcal{GL}_n(k)$ tels que $M(g, e, f) = P.M(g', e, f).Q$

9 Quelques matrices particulières

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_k(m, n)$. On suppose que $M = (\lambda_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$. On appelle **transposée de la matrice M** et on note ${}^t M$ la matrice de $\mathcal{M}_k(n, m)$: ${}^t M = (\lambda'_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ telle que $\lambda'_{ij} = \lambda_{ji} \forall i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$.

Voici quelques matrices carrées particulières et qui seront souvent utilisées:

Définition Soit $M = (\alpha_{ij})_{i, j=1, \dots, n} \in \mathcal{M}_k(n)$. Si $\alpha_{ij} = 0 \forall i \neq j$ alors M est une **matrice diagonale**. Les éléments de la diagonale sont appelés les **coefficients diagonaux**.

Définition Soit $M=(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_k(n)$. Si $\alpha_{ij}=0 \forall i \geq j$ alors M est dite **triangulaire supérieure**. Si de plus les coefficients de la diagonale sont nuls alors M est dite **triangulaire supérieure strict**. On définirait de même les matrices **triangulaires inférieures** et les matrices **triangulaires inférieures strictes**.

Définition On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_k(m,n)$ est **diagonale par bloc** si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k \end{pmatrix}$$

où les M_i sont des matrices carrés.

Remarquons aussi que le produit de deux matrices diagonales est évident à effectuer. De même, il est plus facile de calculer le produit de deux matrices triangulaires que de deux matrices quelconques. De façon générale, il sera plus aisé de travailler avec des matrices d'un de ces deux types qu'avec des matrices quelconques. Une partie de l'algèbre linéaire a pour vocation de déterminer les critères qui permettent de savoir, pour une application linéaire donnée, si elle peut avoir ou non une écriture matricielle sous forme diagonale ou trigonale. Cette théorie s'appelle la réduction des endomorphismes et nous la développerons dans une prochaine leçon.

Définition Soit $M=(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_k(n)$. On appelle **trace** de M et on note $\text{tr}(M)$ la somme des éléments diagonaux de M :

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}.$$

10 Opération sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Définition Soit M une matrice de $\mathcal{M}_k(n,m)$. Notons L_1, \dots, L_n les lignes et C_1, \dots, C_m les colonnes de M . Soit $\lambda \in k$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On appelle :

- **opération élémentaire sur les lignes** de M , l'action qui consiste à additionner la ligne λL_j à une ligne L_i de M .
- **opération élémentaire sur les colonnes** de M , l'action qui consiste à additionner la colonne λC_j à une colonne C_i de M .

Voici quelques matrices particulières (Id désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(k)$) :

Définition Soit $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ les matrices de $\mathcal{M}_n(k)$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui à l'intersection de la i ème ligne et de la j ème colonne. (E_{ij}) forme une base de $\mathcal{M}_n(k)$. Soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Soit $\lambda \in k^*$.

- Supposons que $i \neq j$. On appelle **matrice de transvection**, la matrice $T_{ij}(\lambda) = \text{Id} + \lambda E_{ij}$.
- On appelle **matrice de dilatation**, la matrice $D_i(\lambda)$ qui est diagonale et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 sauf le i ème qui vaut λ .

Proposition Les matrices de transvection et les matrices de dilatation sont des matrices inversibles d'inverse respectivement une matrice de transvection et une matrice de dilatation.

Démonstration L'inverse de la matrice $D_i(\lambda)$ est donnée par la matrice $D_i(\lambda^{-1})$. L'inverse de la matrice $T_{ij}(\lambda) = \text{Id} + \lambda E_{ij}$ est donnée par la matrice $T_{ij}(-\lambda)$. (Un simple calcul permet de s'en convaincre.

Proposition Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(k)$. Soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Soit $\lambda \in k^*$. Soit aussi T_{ij} une matrice de transvection et D_i une matrice de dilatation.

- La matrice $M.T_{ij}(\lambda)$ s'obtient en remplaçant dans M la j ème colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.
- La matrice $T_{ij}(\lambda).M$ s'obtient en remplaçant dans M la i ème ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$.
- La matrice $M.D_i(\lambda)$ s'obtient en remplaçant dans M la i ème colonne C_i par λC_i .
- La matrice $M.D_i(\lambda)$ s'obtient en remplaçant dans M la i ème ligne L_i par λL_i .

Démonstration Il suffit de calculer les différents produits considérés.

Théorème Le groupe linéaire $\mathcal{G}l_n(k)$ est engendré par les matrices de dilatation et les matrices de transvection. (Toute matrice inversible s'écrit comme un produit de matrice de transvection et de dilatation).

Démonstration Nous allons montrer par récurrence sur n que toutes matrices de $\mathcal{G}l_n(k)$ s'écrit sous la forme $DT_1 \dots T_m$ où D est une matrice de dilatation et où les T_i sont des matrices de transvection. Si $n=1$, les matrices de dilatation à elles seules engendrent $\mathcal{G}l_n(k)$. Supposons que les matrices de $\mathcal{G}l_{n-1}(k)$ peuvent être mises sous la forme $DT_1 \dots T_m$ et montrons que ce résultat est encore vrai au rang n . Soit M une matrice de $\mathcal{G}l_n(k)$. Soit \mathcal{A} le sous ensemble de $\mathcal{G}l_n(k)$ composé des matrices de la forme $MT_1 \dots T_m$ où les T_i sont des matrices de transvection. Si cet ensemble possède une matrice de dilatation D alors le résultat est démontré. Car on aura $D = MT_1 \dots T_m$ les matrices de transvection étant inversibles d'inverse une matrice de transvection, en multipliant à droite par $T_m^{-1} \dots T_1^{-1}$, on obtient, $M = DT_m^{-1} \dots T_1^{-1}$ qui est l'écriture de M voulue.

Montrons donc que \mathcal{A} possède une matrice de dilatation. Posons $M = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Si la première ligne de M était nulle, alors le noyau de M (M vue comme un endomorphisme de k^n) serait non réduit à 0 car l'image du vecteur de coordonnées $(1,0,\dots,0)$

serait 0. M ne serait alors pas de rang n et donc pas inversible. La première ligne de M possède donc au moins un coefficient $\alpha_{1j} \neq 0$. La matrice M' obtenue en remplaçant à la 1ère colonne C_1 de M par la colonne $C_1 - \frac{1-\alpha_{11}}{\alpha_{1j}} C_j$ où C_j représente la j ème colonne de M est élément de \mathcal{A} car une telle opération sur M revient à multiplier M à gauche par une matrice de transvection. Notons $M' = (\alpha'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. On a: $\alpha'_{11} = 1$. Ajoutons, pour tout $j=1,\dots,n$, à la j ème colonne de M' , la colonne: $-\alpha_{1j} C'_1$ où C'_1 désigne la 1ère colonne de M' . Ces $n-1$ opérations reviennent à multiplier M à gauche par une transvection. La matrice obtenue au finale est encore un élément de \mathcal{A} que nous noterons M'' . M'' a tout ses coefficients sur la première ligne nuls sauf le premier qui vaut 1. Intéressons nous maintenant à la sous matrice carrée Q de $M'' = (\alpha''_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ de coefficients $Q = (\alpha''_{ij})_{i,j=2,\dots,n}$. Comme M'' est une matrice inversible ses vecteurs colonnes forment un système libre dans k^n . Il en est alors de même pour les vecteurs colonnes V_i $i=2,\dots,n$ de Q . Ces $n-1$ vecteurs forment un système libre dans k^{n-1} . Comme ce dernier est de dimension $n-1$, ces $n-1$ vecteurs forment une base de k^{n-1} . Le vecteur colonne V de coefficients $(\alpha''_{21}, \dots, \alpha''_{n1})$ est alors combinaison linéaire de ces $n-1$ vecteurs. Il existe donc des scalaires a_2, \dots, a_n tel que $V = \sum_{i=2}^n a_i V_i$. A la première colonne de M'' et pour tout $j=2,\dots,n$, ajoutons la j ème colonne de M'' multipliée par $-a_j$. On obtient alors une nouvelle matrice N qui a pour première colonne le vecteur de coordonnées $(1, 0, \dots, 0)$ (et pour première ligne $(1, 0, \dots, 0)$):

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Cette nouvelle matrice est elle aussi obtenue à partie de M par multiplication à gauche par des transvections. N est donc encore élément de \mathcal{A} .

Posons $N = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Ces coefficients vérifient $\beta_{1i} = 0$ et $\beta_{i1} = 0$ pour $i=2,\dots,n$, $\beta_{11} = 1$. Soit $P = (\beta_{ij})_{i,j=2,\dots,n}$. Comme N est inversible, il en est de même de P qui est par conséquent élément de $\mathcal{G}_{n-1}(k)$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à P , $P = D' T'_1 \dots T'_m$ où D est une matrice de dilatation et où les matrices T_i sont des matrices de transvections éléments de $\mathcal{G}_{n-1}(k)$. Soit D la matrice diagonale dont la diagonale est formée du coefficient 1 puis des coefficients de la diagonale de D' . D est une dilatation de $\mathcal{G}_{n-1}(k)$. Soit, pour tout $i=1,\dots,m$, T_i la matrice diagonale par bloc dont le premier bloc est la matrice 1×1 d'unique coefficient 1 et le second bloc la matrice T'_i :

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T'_i \end{pmatrix}$$

Les matrices T_i sont des transvections. De plus $N = D T_1 \dots T_m$. Donc $D = N T_m^{-1} \dots T_1^{-1}$. Comme N est élément de \mathcal{A} , il en est de même de D et c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.