

Formes multilinéaires et déterminant

1 Introduction

Montrer qu'une application linéaire est inversible n'est à priori pas chose évidente. Le déterminant permettra, dans certains cas, de montrer très facilement si une matrice est ou non inversible. Il permettra aussi, toujours dans certains cas, d'obtenir facilement l'inverse d'une matrice. Enfin, il servira, mais c'est pour une leçon prochaine, à la diagonalisation et la trigonalisation des endomorphismes d'un espace vectoriel. Il constituera alors un pont entre la théorie des anneaux polynomiaux et celle de l'algèbre linéaire.

Dans tout ce chapitre k désigne un corps. Rappelons qu'un corps est un espace vectoriel sur lui même de dimension 1.

2 Formes multilinéaires

Définition Soit E un k -espace vectoriel. Soit

$$f : \underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}} \rightarrow k.$$

f est une **forme p-linéaire** ou une **forme multilinéaire** (ou encore une **p-forme linéaire**) sur E si pour tout $i=1, \dots, p$, pour tout $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p \in E$, l'application $x \rightarrow f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$ est linéaire de E dans k . On note $\mathcal{L}^p(E)$ l'ensemble des p -formes linéaires sur E .

Proposition Soit E un k -espace vectoriel. L'ensemble des p -formes linéaires sur E , $\mathcal{L}^p(E)$ muni de l'addition des fonctions à valeurs dans k et de la multiplication par un scalaire a une structure de k -espace vectoriel.

Démonstration On montre sans peine que c'est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur E et à valeurs dans k .

Définition Soit E un k -espace vectoriel. Soit f une forme p -linéaire définie sur un k -espace vectoriel E . Si $p=2$, on dit que f est une **forme bilinéaire**. Si $p=3$, on dit que f est une **forme trilinéaire**.

Définition Soit E un k -espace vectoriel. Une forme p -linéaire est dite **alternée** si pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ vérifiant $\exists i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j, x_i = x_j$, alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$. L'ensemble des formes p -linéaires alternées sur E est notée $\mathcal{A}^p(E)$.

Définition Soit E un k -espace vectoriel. Une forme p -linéaire est dite **symétrique** si pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j$ alors $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$.

Définition Soit E un k -espace vectoriel. Une forme p -linéaire est dite **antisymétrique** si pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j$ alors $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$.

Proposition Si f est une p -forme linéaire antisymétrique et si k est un corps de caractéristique différente de 2 alors f est alternée.

Démonstration Comme f est antisymétrique, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j$ alors $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$. Supposons que $x_i = x_j$. L'égalité précédente devient: $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p)$, soit $2 \cdot f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$, ce qui donne, k étant de caractéristique différente de 2: $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$.

Avant de continuer, effectuons deux petits rappels à propos du groupe des permutations d'un ensemble fini.

Rappel 1:

- L'ensemble des bijections $\sigma : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ est noté S_p . Une telle bijection est appelée une permutation de $\{1, \dots, p\}$.
- S_p muni de la loi de composition des applications possède une structure de groupe.
- Une permutation préservant tout les éléments de $\{1, \dots, p\}$ sauf deux qu'elle permute est appelée une transposition. Toute permutation est produit de transposition. Le nombre de transposition intervenant dans cette décomposition est indépendant de la décomposition (en transposition) choisie.

Rappel 2:

- Il existe un morphisme de groupe surjectif $\varepsilon : S_p \rightarrow \{-1, 1\}$ où $\{-1, 1\}$ est muni de sa structure multiplicative. L'image de ε sur une permutation est appelée la signature de cette permutation.
- Si σ est élément de S_p alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$ où n est le nombre de transposition dans une décomposition de σ en produit de transposition.

Proposition Soit f une forme p -linéaire alternée définie sur un k -espace vectoriel E . Soient v_1, \dots, v_p , p vecteurs de E . Soit aussi σ un élément de S_p . Alors

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \dots, v_p).$$

Démonstration Comme les permutations sont des produits de transposition, il suffit de montrer cette égalité pour une transposition. Soit $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$ et soit τ la transposition de $\{1, \dots, p\}$ qui échange i et j . On a clairement:

$$\begin{aligned} f(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(i)}, \dots, v_{\tau(j)}, \dots, v_{\tau(p)}) &= \\ f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) &= \\ -f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p). \end{aligned}$$

Proposition L'ensemble des p formes linéaires alternées sur le k -espace vectoriel E $\mathcal{A}^p(E)$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des p -formes linéaires sur E $\mathcal{L}^p(E)$.

Démonstration Il suffit de vérifier que la p -forme nulle est bien élément de $\mathcal{A}^p(E)$ et que la combinaison linéaire de deux formes linéaires alternées est encore une p -forme linéaire alternée.

3 Dimension de $\mathcal{A}^p(E)$ et déterminant

Proposition E désigne un k -espace vectoriel de dimension finie et p un entier naturel. Si p est plus grand que la dimension de E alors $\mathcal{A}^p(E) = \{0\}$.

Démonstration Soit $f \in \mathcal{A}^p(E)$ et soient v_1, \dots, v_p , p vecteurs non nuls de E . Comme E est de dimension finie $n < p$, l'un des vecteurs v_p par exemple est combinaison linéaire des $p-1$ autres vecteurs. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ dans k tels que

$$v_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i v_i.$$

On peut alors écrire:

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^{p-1} f(v_1, \dots, v_{p-1}, v_i).$$

Mais comme f est alternée, pour tout $i=1, \dots, p-1$, $f(v_1, \dots, v_{p-1}, v_i) = 0$. On a prouvé que $f(v_1, \dots, v_p) = 0$. Cela étant vrai pour toutes familles de p vecteurs de E v_1, \dots, v_p , f est identiquement nulle sur E .

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension n . L'ensemble des n -formes linéaires alternées sur E : $\mathcal{A}^n(E)$ est de dimension 1 sur k .

Démonstration Considérons une base $e = (e_i)_{i=1, \dots, n}$ de E . Considérons d'autre part une n forme linéaire alternée f sur E ainsi qu'un n -uplet (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E . Pour $i=1, \dots, n$ et $j=1, \dots, n$ il existe des scalaires $\alpha_{ij} \in k$ tels que pour tout $j=1, \dots, n$,

$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$. Considérons aussi l'ensemble \mathcal{P} des suites à n éléments et à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. On peut alors écrire:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(i_k)_{k=1, \dots, n} \in \mathcal{P}} \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_n n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Remarquons qu'il existe une bijection évidente entre \mathcal{P} et S_n . Cette bijection est celle qui à une suite $(i_k)_{k=1, \dots, n}$ de \mathcal{P} associe la permutation qui envoie l'entier m sur l'entier i_m . Via cette remarque, on peut écrire:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

f étant alternée, pour tout $\sigma \in S_n$,

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \dots, v_n).$$

Donc:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n).$$

Soit encore:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

et posant

$$\Pi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}$$

v_1, \dots, v_n étant n vecteurs quelconques dans E :

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \cdot \Pi.$$

Il faut montrer que Π est une forme multilinéaire et alternée. On vérifie sans peine que Π est multilinéaire. Soient v_1, \dots, v_n n vecteurs de E et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i < j$ et tels que $v_i = v_j$.

$$\begin{aligned} \Pi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)j} \dots \alpha_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)i} \dots \alpha_{\sigma(n)n}. \end{aligned}$$

Soit τ la transposition qui échange i et j . τ préserve tout les autres éléments de $\{1, \dots, n\}$.
Donc

$$\Pi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(\tau(1))1} \dots \alpha_{\sigma(\tau(i))i} \dots \alpha_{\sigma(\tau(j))j} \dots \alpha_{\sigma(\tau(n))n}.$$

Comme $\tau = \tau^{-1}$, et $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$,

$$\Pi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \circ \tau \in S_n} -\varepsilon(\sigma \circ \tau) \alpha_{\sigma(\tau(1))1} \dots \alpha_{\sigma(\tau(i))i} \dots \alpha_{\sigma(\tau(j))j} \dots \alpha_{\sigma(\tau(n))n}$$

$$= - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)j} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

En conclusion

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)j} \dots \alpha_{\sigma(n)n} = - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)j} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Donc $\Pi(v_1, \dots, v_n) = 0$ et Π est bien alternée.

Définition - Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit $e=(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **application déterminant** dans la base e l'application multilinéaire alternée qui à n vecteurs v_j $j=1, \dots, n$ de E d'écriture $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ dans la base E associe la quantité

$$\det_e(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)j} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Démonstration Nous venons de démontrer que cette application est multilinéaire alternée.

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit $e=(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit \det_e l'application déterminant associée à cette base. Alors $\det_e(e_1, \dots, e_n)=1$.

Démonstration Il suffit de revenir à la définition du déterminant.

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit n la dimension de E et soit $e=(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit f une application n -linéaire alternée. Soient aussi v_1, \dots, v_n n vecteurs de E .

$$f(v_1, \dots, v_n) = f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_e(v_1, \dots, v_n).$$

Démonstration Cette proposition n'est rien d'autre que la ré-écriture de celle démontrée au début de ce paragraphe et qui donne la dimension de $\mathcal{A}^n(E)$. Se reporter donc à la démonstration de cette proposition.

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit n la dimension de E . Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$. Alors la dimension de $\mathcal{A}^p(E)$ est donnée par $\dim \mathcal{A}^p(E) = C_n^p$ où C_n^p désigne le rapport $\frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Démonstration Notons \mathcal{P} l'ensemble des suites à p éléments distincts et à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Une suite élément de \mathcal{P} sera notée $(i_k)_{k=1, \dots, p}$. Soient v_1, \dots, v_p p vecteurs de E . Pour $i=1, \dots, n$ et $j=1, \dots, p$ il existe des scalaires $\alpha_{ij} \in k$ tels que pour tout $j=1, \dots, p$

$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$. Si f est une p -forme linéaire sur E ,

$$(*) f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{(i_k)_{k=1, \dots, p} \in \mathcal{P}} \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_p p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

La somme précédente est donc prise sur l'ensemble des suites appartenant à \mathcal{P} . Etudions plus précisément \mathcal{P} . Une suite de \mathcal{P} est caractérisée par:

- L'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre.
- L'ordre dans lequel elle prend ces valeurs.

Désignons par les entiers $k_1 < \dots < k_p$ les p valeurs pouvant être prises par une suite donnée de \mathcal{P} . Soient i_1, \dots, i_p et i'_1, \dots, i'_p deux suites de \mathcal{P} prenant leur valeurs dans $\{k_1, \dots, k_p\}$. Il existe une unique permutation σ de S_p telle que $i_{\sigma(m)} = i'_m$ pour tout $m=1, \dots, p$. Réciproquement si i_1, \dots, i_p est une suite de \mathcal{P} et que σ est une permutation de S_p , alors $i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}$ est une autre suite de \mathcal{P} prenant ses valeurs dans le même ensemble que la suite $(i_k)_{k=1, \dots, p}$. Le sous ensemble de \mathcal{P} des suites qui sont à valeur dans $\{k_1, \dots, k_p\}$ peut donc être décrit par l'ensemble $\{k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(p)}; \sigma \in S_p\}$. En conclusion \mathcal{P} peut lui être décrit par:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \{k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(p)}; \sigma \in S_p\}.$$

Ce partitionnement de \mathcal{P} permet une autre écriture de la somme (*):

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{k_{\sigma(1)} 1} \dots \alpha_{k_{\sigma(p)} p} f(e_{k_{\sigma(1)}}, \dots, e_{k_{\sigma(p)}}).$$

Mais comme f est alternée, ceci se ré-écrit:

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{k_{\sigma(1)} 1} \dots \alpha_{k_{\sigma(p)} p} \varepsilon(\sigma) f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}).$$

Ou encore:

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{k_{\sigma(1)} 1} \dots \alpha_{k_{\sigma(p)} p} \varepsilon(\sigma) \right) f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}).$$

L'expression entre parenthèses est exactement égale à $\det_{e_{k_1}, \dots, e_{k_p}}(v_{k_1}, \dots, v_{k_p})$. Notons (pour $1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n$) Π_{k_1, \dots, k_p} l'application qui à un n -uplet (v_1, \dots, v_n) associe le p -uplet $(v_{k_1}, \dots, v_{k_p})$. Notons aussi e_{k_1, \dots, k_p} la famille libre e_{k_1}, \dots, e_{k_p} . (*) admet comme écriture:

$$f(v_1, \dots, v_p) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \det_{e_{k_1}, \dots, e_{k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p}(v_1, \dots, v_n) f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}).$$

Soit encore, (v_1, \dots, v_n) étant un n -uplet quelconque de vecteurs de E :

$$f = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}) \det_{e_{k_1}, \dots, e_{k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p}.$$

Ce qui est beaucoup plus sympathique.

On vérifie sans peine que les fonctions $\det_{e_{k_1, \dots, k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p}$ sont des formes p-linéaires alternées. $\mathcal{A}^p(E)$ est donc engendré par l'ensemble des formes $\mathcal{F} = \{\det_{e_{k_1, \dots, k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p}; 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n\}$. Remarquons que l'ensemble des p-uplets k_1, \dots, k_p tels que $1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n$ est de cardinal C_n^p . Donc \mathcal{F} est de cardinal C_n^p . Montrons pour terminer que cette famille est libre. Considérons une famille de scalaires (λ_i) pour i allant de 1 à C_n^p . Re-indiquons cette suite de la façon suivante: $(\lambda_{k_1, \dots, k_p})_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n}$, ce qui sera bien plus pratique. Supposons que cette suite vérifie:

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \lambda_{k_1, \dots, k_p} \det_{e_{k_1, \dots, k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p} = 0.$$

Par ailleurs, si $1 \leq m_1 < \dots < m_p \leq n$, étudions

$$\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} \lambda_{k_1, \dots, k_p} \det_{e_{k_1, \dots, k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p} (e_{m_1}, \dots, e_{m_p}).$$

Chacun des termes $\det_{e_{k_1, \dots, k_p}} \circ \Pi_{k_1, \dots, k_p} (e_{m_1}, \dots, e_{m_p})$ est nul sauf celui tel que $k_1 = m_1, \dots, k_p = m_p$ qui vaut 1. Donc $\lambda_{m_1, \dots, m_p} = 0$. On peut faire ce raisonnement pour tout les p-uplets m_1, \dots, m_p tels que $1 \leq m_1 < \dots < m_p \leq n$, ce qui prouve que chacun des $\lambda_{m_1, \dots, m_p}$ est nul et que la famille \mathcal{F} est libre. Ouf!!!

4 Déterminant d'une matrice, d'une application linéaire

Définition Soit $M = (\alpha_{ij})_{i, j=1, \dots, n}$ une matrice carrée à coefficients dans le corps k . On appelle déterminant de la matrice M et on note $\det(M)$ le déterminant des n vecteurs dont les coordonnées (dans la base canonique de k^n) sont données par les colonnes de M :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(i)i} \dots \alpha_{\sigma(j)j} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Proposition Soit E un k -espace vectoriel de dimension égale à n . Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . Alors: $\det_e(e'_1, \dots, e'_n) \cdot \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) = 1$ ($\det_e(e'_1, \dots, e'_n)$ est inversible dans k d'inverse $\det_{e'}(e_1, \dots, e_n)$).

Démonstration L'application qui au n-uplets (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E associe $\det_{e'}(v_1, \dots, v_n)$ est n-multilinéaire alternée. Donc $\det_{e'}(v_1, \dots, v_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_e(v_1, \dots, v_n)$. Mais $\det_{e'}(e'_1, \dots, e'_n) = 1$ donc $\det_{e'}(e_1, \dots, e_n)$ est inversible dans k d'inverse celui précisé dans la proposition.

Définition - Proposition Soit f une application linéaire définie sur le k -espace vectoriel E de dimension finie. Soit e une base de E . Si $M_e(f)$ désigne la matrice de f dans la base E , alors on appelle déterminant de f le scalaire de k $\det(f) = \det M_e(f)$.

Démonstration Soit $n = \dim E$. Il s'agit bien évidemment de montrer que si e' est une autre base de E alors $\det_e M_e(f) = \det_{e'} M_{e'}(f)$, ce qui garantira le sens de cette définition. Rappelons que $M_e(f)$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont données par les coordonnées des $f(e_i)$ pour $i=1, \dots, n$ dans la base e . Donc $\det_e M_e(f) = \det_e(f(e_1), \dots, f(e_n))$. De même $\det_{e'} M_{e'}(f) = \det_{e'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n))$.

Intéressons nous à l'application qui au n -uplet (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E associe $\det_e(f(v_1), \dots, f(v_n))$. Cette application est n -linéaire alternée. Donc $\det_e(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \det_e(f(e_1), \dots, f(e_n)) \times \det_e(v_1, \dots, v_n)$. En particulier, $\det_e(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \det_e(f(e_1), \dots, f(e_n)) \times \det_e(e'_1, \dots, e'_n)$. Soit encore:

$$\det_e(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \det_e(M_e(f)) \times \det_e(e'_1, \dots, e'_n).$$

D'autre part l'application qui au n -uplet (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E associe $\det_{e'}(v_1, \dots, v_n)$ est elle aussi n -multilinéaire alternée. Donc $\det_{e'}(v_1, \dots, v_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(v_1, \dots, v_n)$. Si on applique cette formule au n -uplet $(f(e'_1), \dots, f(e'_n))$, on obtient $\det_{e'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(f(e'_1), \dots, f(e'_n))$. Ce qui s'écrit aussi:

$$\det_{e'}(f(e'_1), \dots, f(e'_n)) = \det_{e'}(M_{e'}(f)) \times \det_{e'}(e_1, \dots, e_n).$$

On aboutit à l'égalité:

$$\det_e(M_e(f)) \times \det_e(e'_1, \dots, e'_n) = \det_{e'}(M_{e'}(f)) \times \det_{e'}(e_1, \dots, e_n).$$

En vertu de la proposition précédente ($\det_e(e'_1, \dots, e'_n) \cdot \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) = 1$), cela donne

$$\det_e(M_e(f)) = \det_{e'}(M_{e'}(f)).$$

Donc $\det(f)$ est bien indépendant de la base choisie.

5 Quelques propriétés du déterminant

Proposition Si f et g sont deux endomorphismes du k -espace vectoriel E alors

$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f).$$

Démonstration Soit n la dimension de E et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Considérons l'application qui au n -uplet (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E associe $\det_e(g(v_1), \dots, g(v_n))$. Cette application est n -multilinéaire alternée. Donc

$$\det_e(g(v_1), \dots, g(v_n)) = \det_e(g(e_1), \dots, g(e_n)) \times \det_e(v_1, \dots, v_n).$$

Appliquons cette formule au n -uplet $(f(v_1), \dots, f(v_n))$, on obtient

$$\det_e(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_n))) = \det_e(g(e_1), \dots, g(e_n)) \times \det_e(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

ce qui est exactement

$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f).$$

Proposition Soit $M=(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée à coefficients dans le corps k . Soit tM la transposée de la matrice M . Alors $\det(M)=\det({}^tM)$.

Démonstration Si $M=(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ alors ${}^tM=(\alpha'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ avec pour tout $i,j=1,\dots,n$ $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$ et

$$\begin{aligned} \det({}^tM) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha'_{\sigma(1)1} \dots \alpha'_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \dots \alpha_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Comme les applications σ de S_n sont des bijections, que le multiplication est commutative, on peut écrire:

$$\alpha_{1\sigma(1)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} = \alpha_{\sigma^{-1}(1)1} \dots \alpha_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

De plus, ε étant un morphisme de groupes multiplicatifs, $\varepsilon(\sigma\sigma^{-1})=1$ et donc $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$. Cela donne

$$\det({}^tM) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Proposition Soit M une matrice triangulaire par bloc.

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M' \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Où M_1 et M_2 sont des matrices carrés. Le déterminant de M est égal au produit $\det(M_1) \times \det(M_2)$.

Démonstration On suppose que M est une matrice carrée à n colonnes. On suppose que M_1 possède m colonnes. M_2 possède donc $n-m$ colonnes. Notons aussi $M=(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Considérons $\mathcal{A}=\{\sigma \in S_n; \sigma(\{1,\dots,m\}) = \{1,\dots,m\}\}$. Si σ n'est pas élément de \mathcal{A} alors $\exists i \in \{1,\dots,m\}$ tel que $\sigma(i) \in \{m+1,\dots,n\}$. Pour cet entier i , $\alpha_{\sigma(i)i}=0$ et

$$\varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n} = 0.$$

Donc

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Mais si $\sigma \in \mathcal{A}$ alors $\sigma(\{1,\dots,m\}) = \{1,\dots,m\}$ et $\sigma(\{m+1,\dots,n\}) = \{m+1,\dots,n\}$. σ est le produit d'une permutation de $\{1,\dots,m\}$ et d'une permutation de $\{m+1,\dots,n\}$. Notons S'_{n-m} l'ensemble des permutations de $\{m+1,\dots,n\}$. On obtient:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_m} \sum_{\sigma' \in S'_{n-m}} \varepsilon(\sigma\sigma') \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(m)m} \cdot \alpha_{\sigma'(m+1)m+1} \dots \alpha_{\sigma'(n)n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(m)m} \times \sum_{\sigma' \in S'_{n-m}} \varepsilon(\sigma') \alpha_{\sigma'(m+1)m+1} \dots \alpha_{\sigma'(n)n} \\
&= \det(M_1) \times \det(M_2).
\end{aligned}$$

Corollaire Soit M une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) à coefficients dans un corps k . Alors le déterminant de M est égal au produit des éléments diagonaux de M .

Démonstration Intéressons nous en un premier temps aux matrices triangulaires supérieures. On remarque que si M est d'ordre 1, son déterminant est clairement égal à son (seul) coefficient diagonal. Supposons que la propriété est vraie pour toutes les matrices d'ordre $n-1$. Soit M une matrice d'ordre n . Ecrivons M sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

où M' est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ et où λ_{11} est le premier coefficient diagonale de M . La propriété précédente permet d'affirmer que $\det(M) = \lambda_{11} \times \det(M')$. Appliquons l'hypothèse de récurrence: le déterminant de M' est égal au produit des coefficients diagonaux de M' . Le déterminant de M est alors bien égal au produit de ses coefficients diagonaux et le théorème est démontré.

Corollaire L'application identique Id sur le k -espace vectoriel de dimension fini E vérifie $\det(\text{Id}) = 1$.

Démonstration En effet, la représentation matricielle de Id dans une base de E est la matrice dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et qui a tout ses autres coefficients égaux à 0. Le déterminant d'une application linéaire étant celui d'une de ses représentations matricielles, on obtient le résultat prévu.

6 Méthodes de calcul du déterminant

Proposition Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans k . On ne change pas la valeur du déterminant de M en:

- Effectuant une opération élémentaire sur les colonnes de M .
- Effectuant une opération élémentaire sur les lignes de M .

Démonstration Si $M = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ alors M est composée des n vecteurs colonnes

$$v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M est égal, par définition du déterminant d'une matrice, au déterminant de ces n vecteurs.

Effectuer une opération sur les colonnes de M revient à additionner λv_i où $\lambda \in \mathbb{k}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ à une des colonnes C_j de M . Soit M' la matrice obtenue en additionnant λv_i à la j ème colonne de M . On a:

$$\det(M') = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_n).$$

Par multilinéarité du déterminant, ceci devient:

$$\det(M') = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \lambda \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

et comme le déterminant est alterné, $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0$ et

$$\det(M') = \det(v_1, \dots, v_n) = \det(M).$$

Pour ce qui est des opérations élémentaires sur les lignes il suffit de considérer la transposée de M : une opération élémentaire sur les lignes de M est une opération élémentaire sur les colonnes de tM , puis d'appliquer ce qui vient d'être démontré.

Proposition Soit M une matrice carrée d'ordre n . Soit $\lambda \in \mathbb{k}$.

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \cdot \det(M).$$

Démonstration Comme précédemment il suffit de remarquer que si v_1, \dots, v_n sont les vecteurs colonnes constituant la matrice M alors $\lambda v_1, \dots, \lambda v_n$ sont ceux qui constituent λM et

$$\det(\lambda M) = \det(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

L'application déterminant étant n -linéaire, on aboutit à l'égalité

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(v_1, \dots, v_n) = \lambda^n \det(M).$$

Proposition Soit M une matrice carrée d'ordre n . On change le signe du déterminant de M si:

- On permute deux colonnes de M .
- On permute deux lignes de M .

Démonstration M est constituée des n vecteurs colonnes v_i $i=1, \dots, n$. Le déterminant de M est égale au déterminant de ces n vecteurs. Permuter deux colonnes de M revient à permuter les deux vecteurs correspondants dans la liste (v_1, \dots, v_n) . Supposons que les vecteurs permutés soient le i ème et le j ème ($i < j$), L'application déterminant

étant alternée, $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$, cqfd. Pour ce qui est des lignes, il suffit de considérer la transposée de M .

Proposition Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne Soit $M = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans k . Soit M_{pq} la matrice carrée d'ordre $n-1$

$$M_{pq} = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n \ i \neq p \ j \neq q}.$$

Le déterminant de M admet comme développement par rapport à la j ème colonne:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(M_{ij})$$

et par rapport à la i ème ligne:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(M_{ij}).$$

Démonstration Considérons là encore les vecteurs colonnes de M

$$v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

Considérons aussi la base canonique e de k^n . Pour tout $j=1,\dots,n$, $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$. Le déterminant de M est égal au déterminant des n vecteurs v_j . Considérant le j ème vecteur, par multilinéarité de l'application déterminant,

$$\det(M) = \det(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \det(v_1, \dots, v_{j-1}, e_i, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

Représentant les n vecteurs $(v_1, \dots, v_{j-1}, e_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$ par une matrice M' , on obtient pour M' l'écriture:

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j-1} & 0 & \alpha_{1j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{i-11} & \cdots & \alpha_{i-1j-1} & 0 & \alpha_{i-1j+1} & \cdots & \alpha_{i-1n} \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij-1} & 1 & \alpha_{ij+1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \alpha_{i+11} & \cdots & \alpha_{i+1j-1} & 0 & \alpha_{i+1j+1} & \cdots & \alpha_{i+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj-1} & 0 & \alpha_{nj+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Par transposition des lignes et des colonnes de M' , on transforme la matrice M' en la matrice M'' :

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & M_{ij} & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

M'' est triangulaire par bloc. De plus, comme M'' est obtenue à effectuant $i-1$ transpositions sur les lignes de M' et $j-1$ transposition sur les colonnes de M' , le $\det(M') = (-1)^{i+j} \det(M'')$. Mais $\det(M'') = \det(M_{ij})$. Donc

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Pour ce qui est du développement suivant les lignes, il suffit de refaire le même calcul avec la transposée de M .

Définition Soit $M = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée d'ordre n . Soit M_{pq} la matrice carrée d'ordre $n-1$

$$M_{pq} = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n \ i \neq p \ j \neq q}.$$

On appelle matrice adjointe de la matrice M la matrice carrée d'ordre n $M^* = (\alpha'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ où $\forall i,j=1,\dots,n$, $\alpha'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Définition On appelle comatrice de la matrice carrée M la transposée de la matrice adjointe de M .

Proposition Si M est une matrice carrée d'ordre n et que M^* est la comatrice de M alors $M.M^* = M^*.M = \det(M).Id$.

Démonstration Supposons que $M = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ et que $M^* = M = (\alpha'_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Alors

$M.M^* = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ avec $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha'_{kj}$. Donc

$$(*) \beta_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \alpha_{ik} \det(M_{jk}).$$

Supposons que $i \neq j$ et remplaçons dans la matrice M la j ème ligne par la i ème. Développons ensuite cette dernière matrice suivant cette j ème ligne. On obtient pour le déterminant de cette matrice exactement l'expression (*). Mais cette matrice possédant deux lignes égales a un déterminant nul. Donc si $i \neq j$, $\beta_{ij} = 0$. Si $i = j$, $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \alpha_{ik} \det(M_{ik})$ qui est exactement égale au développement de $\det(M)$ suivant la i ème ligne. donc $\beta_{ii} = \det(M)$. En conclusion $M.M^* = \det(M).Id$.

Travaillons maintenant sur le produit $M^*.M$. Posons ici encore $M^*.M=(\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ avec $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha'_{ik} \alpha_{kj}$. Donc

$$(**) \beta_{ij} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \det(M_{ki}) \cdot \alpha_{kj}.$$

Si $i \neq j$, on remplace la i ème colonne de M par la j ème. Développant cette nouvelle matrice suivant cette i ème colonne, on obtient exactement l'expression (**). On termine alors comme précédemment.

Théorème Soit M une matrice carrée d'ordre n . M est inversible dans l'anneau $\mathcal{M}_n(k)$ si et seulement si son déterminant est non nul. De plus, dans le cas où M est inversible, la matrice inverse de M est égale à, M^* étant la matrice adjointe de M

$$M^{-1} = (\det(M))^{-1} \cdot M^*$$

et

$$\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}.$$

Démonstration Si M est une matrice carrée inversible, alors il existe une matrice N de même ordre que M telle que $M.N=N.M=Id$. Donc $\det(M.N)=\det(Id)=1$. Mais $\det(M.N)=\det(M) \cdot \det(N)$. Donc $\det(M)$ est inversible dans k (et est par conséquent non nul) et $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$. Supposons que $\det(M)$ est non nul et calculons. Notons M^* la matrice adjointe de M . La proposition précédente donne $M.M^* = M^*.M = \det(M).Id$. Comme $\det(M)$ est non nul, $\det(M)$ est inversible et il en est de même de M . On obtient alors exactement l'expression voulue pour M^{-1} .

Le calcul de la matrice adjointe d'une matrice offre donc un moyen de calculer l'inverse de cette matrice. Ce calcul est cependant souvent très laborieux. Cette technique est utilisée en particulier pour résoudre des systèmes d'équations du premier degré.(Système de Cramer).