

Précompacité et théorème d'Ascoli

1 Introduction

Le théorème d'Ascoli est un profond résultat d'analyse fonctionnelle. Il nous servira à illustrer la puissance du formalisme topologique sur des espaces abstraits comme les espaces de fonctions. Afin d'établir sa démonstration, nous introduirons la notion d'espaces précompacts. La précompacité nous donnera un critère de compacité des espaces complets.

2 Précompacité

On considère dans cette partie un espace métrique (X, d) .

Définition On dit que la famille $\{x_i; i = 1, \dots, p\}$ d'éléments de X est un ε -réseau de X si $X = \bigcup_{i=1}^p \bar{B}(x_i, \varepsilon)$ où $\bar{B}(x, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon ε .

Définition On dit que (X, d) est **précompact** si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un ε -réseau de X .

Proposition Si (X, d) est précompact, alors pour tout sous ensemble Y de X muni de la métrique induite (notée, par abus d'écriture, d):

- (Y, d) est précompact.
- (\bar{Y}, d) est précompact.

Démonstration

- Montrons que (Y, d) est précompact. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\{x_i; i = 1, \dots, p\}$ un $\varepsilon/2$ -réseau de X . En particulier, on a $Y \subset \bigcup_{i=1}^p \bar{B}(x_i, \varepsilon/2)$. Nommons A la sous famille de $\{x_i; i = 1, \dots, p\}$ des éléments x_i tels que $\bar{B}(x_i, \varepsilon/2)$ intersecte Y . On peut écrire: $Y \subset \bigcup_{i=1}^p \bar{B}(x_i, \varepsilon/2)$. Le problème est que les x_i de A ne sont pas nécessairement éléments de Y . Par contre, comme pour tout x_i de A , $\bar{B}(x_i, \varepsilon/2) \cap Y \neq \emptyset$, dans chacune de ces intersections, on peut trouver un élément y_i de Y tel que

$$\bar{B}(x_i, \varepsilon/2) \subset \bar{B}(y_i, \varepsilon).$$

La famille $\{y_i\}$ est alors un ε -réseau de Y .

- Montrons que (\bar{Y}, d) est précompact si (Y, d) l'est. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$ un ε réseau de Y . On peut donc écrire: $Y \subset \bigcup_{i=1}^p \bar{B}(x_i, \varepsilon)$ et donc

$$\bar{Y} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^p \bar{B}(x_i, \varepsilon)}.$$

Mais ceci implique que $\bar{Y} \subset \bigcup_{i=1}^p \bar{B}(x_i, \varepsilon)$, cqfd.

Théorème On a équivalence entre:

- (X, d) est compact.
- (X, d) est précompact et complet.

Démonstration

- Supposons que X est compact. Soit $\varepsilon > 0$ et soit le recouvrement ouvert de X : $(B(x, \varepsilon))_{x \in X}$. Comme X est compact, on peut en extraire un recouvrement fini de la forme $(B(x_i, \varepsilon))_{i=1, \dots, n}$ où les x_i sont des éléments de X . On a ainsi prouvé l'existence d'un ε -réseau. D'autre part, on sait que tout espace métrique compact est complet.

- Supposons X précompact et complet. Supposons de plus que X n'est pas compact. Soit la suite de réels $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie en sorte qu'elle soit convergente vers 0. Comme X est précompact, il existe un ε_0 -réseau de X : $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$. Comme X n'est pas compact, on peut trouver un recouvrement ouvert de X : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel qu'aucune sous famille finie de ce recouvrement ne recouvre X . En particulier, il existe une boule $B_0 = \bar{B}(x_i, \varepsilon_0)$ (où x_i est un élément du ε_0 -réseau) telle qu'aucune sous famille finie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne la recouvre. On recommence le même raisonnement au sein du sous espace précompact $B_0 = \bar{B}(x_i, \varepsilon_0)$. On choisit un ε_1 -réseau de B_0 : $\{y_1, \dots, y_m\}$. Ceci nous permet de construire une boule $B_1 = \bar{B}(y_k, \varepsilon_1)$ où y_k est un élément du ε_1 -réseau. La boule B_1 est telle qu'aucune sous famille de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne la recouvre. On construit par récurrence et par cette méthode une suite décroissante de boules fermées $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que B_i a pour rayon ε_i . Aucune sous famille finie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne recouvre un élément B_i de cette suite. Par contre, comme $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous ensemble de X dont le diamètre (diamètre de $B_k = \varepsilon_k$) tend vers 0 et que X est complet, il existe un élément x de X tel que $\bigcap_{i \geq 0} B_i = \{x\}$. x étant élément de X et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une famille dont

la réunion est égale à X , il existe un élément U_i de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $x \in U_i$. Mais U_i est un ouvert de X . On peut donc trouver un réel strictement positif ε tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Mais comme x est élément de chaque B_k pour $k \in \mathbb{N}$ et que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on peut trouver une boule B_k de rayon suffisamment petit en sorte qu'elle soit toute entière contenue dans $B(x, \varepsilon)$. Cette boule B_k est tout entière

dans U_i et est par conséquent recouvrable par une sous famille finie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci est en contradiction avec ce que nous connaissons de $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et prouve que notre hypothèse de départ est fautive. Ainsi X est compact.

Ajoutons la définition suivante:

Définition On dira qu'un sous espace A d'un espace topologique (Z, \mathcal{O}) est **relativement compact** (pour la topologie induite) si son adhérence est compact.

3 Théorème d'Ascoli

On considère dans cette section deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) . Nous allons travailler sur l'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y . Nous allons supposer que (X, d) est un espace métrique compact. Ainsi on pourra munir $\mathcal{C}(X, Y)$ de la topologie de la convergence uniforme. On notera, comme d'habitude, si f et g sont des éléments de $\mathcal{C}(X, Y)$, $\|f - g\| = \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$. Rappelons aussi que si (Y, δ) est complet alors il en est de même de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Définition Soit A une partie de $\mathcal{C}(X, Y)$. On dira que A est **équicontinue** sur X si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0; \forall f \in A \forall x, y \in X; d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On remarque que l'équicontinuité est une généralisation de l'uniforme continuité.

Théorème d'Ascoli Soit A une partie de $\mathcal{C}(X, Y)$. On a équivalence entre:

- A est équicontinue sur X .
- A est relativement compact dans $\mathcal{C}(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration

- Supposons que A est relativement compact. Montrons que A est équicontinue. Choisissons un réel $\varepsilon > 0$. Comme \bar{A} est compact, on peut trouver une famille

$(f_i)_{i=1, \dots, n}$ d'éléments de \bar{A} tel que $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon/3)$. Soit f un élément de A .

On cherche un réel η indépendant de $f \in A$ tel que pour tout $x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) < \eta$ alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Prenons donc x et y dans X . On a, par l'inégalité triangulaire, pour tout $i=1, \dots, n$:

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f_i(x)) + \delta(f_i(x), f_i(y)) + \delta(f_i(y), f(y)).$$

De plus comme f est élément de A et que A est recouvert par des boules de rayon $\varepsilon/3$ et de centre les f_i , on peut trouver k dans $\{1, \dots, n\}$ tel que $f \in B(f_k, \varepsilon)$. En utilisant l'inégalité précédente dans le cas où $i=k$, on montre que

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \delta(f_k(x), f_k(y)) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Les applications f_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$ sont uniformément continues sur X car continues sur un compact. Pour tout $x, y \in X$, on peut donc trouver un réel η_i tel que $d(x, y) < \eta_i \Rightarrow \delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon/3$. Posons

$$\eta = \inf_{i=1}^n \eta_i.$$

Alors si $d(x, y) < \eta$, on a, pour tout $i=1, \dots, n$, $\delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon/3$. Cette inégalité est bien évidemment vraie si $i=k$, ce qui nous prouve, en utilisant la majoration précédente de $\delta(f(x), f(y))$ que

$$\delta(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Le réel η est bien indépendant de f . Ainsi la famille A est équicontinue.

- Supposons que A est équicontinue. Nous voulons montrer que \bar{A} est compact. Cela revient à montrer que ce sous ensemble de $\mathcal{C}(X, Y)$ est précompact et complet. Comme \bar{A} est fermé, on sait qu'il est complet comme sous espace fermé d'un espace complet. Reste à montrer qu'il est précompact. Mais il suffit, d'après la proposition démontrée au début de ce thème, de prouver que A est précompact. Nous allons devoir déterminer, à ε donné, une famille finie F d'éléments de A tel que

$$A \subset \bigcup_{f \in F} \bar{B}(f, \varepsilon).$$

La difficulté principale à laquelle nous sommes confronté est celle de caractériser les ensembles $\bar{B}(f, \varepsilon)$. Autrement dit, si f est donnée dans A , comment décrire l'ensemble des $g \in A$ tels que $\delta(f, g) = \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$. A priori, pour trouver un tel g dans A , il faut vérifier autant d'inégalités qu'il y a de points x dans X !!! Essayons donc de trouver des conditions plus génériques sur g et qui nous garantissent la majoration désirée.

Comme X est compact, il est précompact. Comme A est équicontinue, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ et $\delta(g(x), g(y)) < \varepsilon/3$. Choisissons alors un η -réseau $\Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$ de X . Supposons que notre application vérifie la condition suivante: **Pour tout $\eta > 0$ et tout η -réseau de X correspondant,**

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \delta(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon/3.$$

Alors on peut affirmer que $\delta(f, g) < \varepsilon$. En effet, pour tout x dans X et tout $i=1, \dots, n$,

$$\delta(f(x), g(x)) \leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), g(x_i)) + \delta(g(x_i), g(x)).$$

On a, pour les éléments x_i de Δ et pour tout x vérifiant $d(x_i, x) < \eta$: $\delta(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/3$ et $\delta(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/3$. Ceci nous donne alors bien $\delta(f, g) < \varepsilon$.

Formons dès lors une seconde hypothèse: **On se donne un $\varepsilon/6$ -réseau de Y $\Xi = \{y_j; j = 1, \dots, m\}$ et on suppose que g vérifie :**

$$\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X} \exists \mathbf{y}_k \in \mathbf{Y} / f(\mathbf{x}_i) \in \overline{B}(\mathbf{y}_k, \varepsilon/6) \text{ et } g(\mathbf{x}_i) \in \overline{B}(\mathbf{y}_k, \varepsilon/6).$$

Si g vérifie cette seconde hypothèse alors pour tout $i=1, \dots, n$, $\delta(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon$ et g vérifie la première hypothèse. Ceci implique que g vérifie l'inégalité $\delta(f, g) \leq \varepsilon$. Nous disposons maintenant d'un critère utilisable pour savoir si une fonction g de A vérifie $\delta(f, g) \leq \varepsilon$. Posons

$$T = \{\phi : \delta \rightarrow \Xi\}$$

et si ϕ est élément de T ,

$$A_\phi = \{f \in A; \forall x_i \in \Delta f(x_i) \in \overline{B}(\phi(x_i), \varepsilon/6)\}.$$

Remarquons que T est de cardinal fini ($\text{card}(T)=m^n$). Remarquons aussi que pour tout $f \in A$, il existe un élément ϕ de T tel que $f \in A_\phi$. En effet, comme Y est recouvert par des boules de rayon $\varepsilon/6$ et de centre les y_j de Ξ , tout x_i de Δ à pour image par f un élément $f(x_i)$ qui est contenu dans l'une de ces boules, $\overline{B}(y_j, \varepsilon/6)$ par exemple. On définit alors notre application ϕ par $\phi(x_i) = y_j$. Nous sommes alors en mesure d'écrire l'inclusion

$$A \subset \bigcup_{\phi \in T} A_\phi.$$

Choisissons un élément f_ϕ dans chaque A_ϕ . Appelons B l'ensemble des f_ϕ ainsi choisis. B est un ε -réseau de A : si f est élément de A_ϕ alors f et f_ϕ vérifient toutes les deux la seconde hypothèse. Mais celle ci implique que $\delta(f, f_\phi) < \varepsilon$ et donc que $f \in \overline{B}(f_\phi, \varepsilon)$. Autrement dit $A_\phi \subset \overline{B}(f_\phi, \varepsilon)$ et

$$A \subset \bigcup_{\phi \in T} \overline{B}(f_\phi, \varepsilon).$$

T étant de cardinal fini, ce recouvrement de A est fini. Ceci prouve la précompacité de A et termine la démonstration.