

Topologie de la convergence simple et de la convergence uniforme

1 Introduction

Beaucoup d'objets mathématiques s'obtiennent, en Analyse, par passage à la limite. Ainsi on peut définir, par exemple, la fonction exponentielle (réelle) par : si x est élément de \mathbb{R}

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Le problème qui se pose très vite est de savoir lesquelles des propriétés des termes de la suite sont conservées au niveau de la limite. Un autre problème est celui de préciser la convergence de la suite de fonction: convergence point par point, convergence "globale"? Nous verrons dans cette leçon que ces deux questions sont liées.

2 Topologie de la convergence simple

Soit X un ensemble et (Y, \mathcal{O}) un espace topologique.

Définition Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f pour la topologie de Y quand n tend vers l'infini si $\forall x \in X, f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

Définition Ceci permet de définir une topologie sur $\mathcal{F}(X, Y)$: l'ensemble des fonctions de X dans Y . Cette topologie sur $\mathcal{F}(X, Y)$ est **la topologie de la convergence simple**:

- On définit tout d'abord les "fermés" par la propriété suivante:
" $F \subset \mathcal{F}(X, Y)$ est un fermé $\Leftrightarrow F$ est vide ou alors toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge simplement vers un élément f de $\mathcal{F}(X, Y)$ a sa limite f dans F ".
Autrement dit, F est fermé si et seulement si F est vide ou alors si pour tout élément f de $\mathcal{F}(X, Y)$ qui est limite simple d'une suite d'éléments de F , f est élément de F .
- On définit naturellement les éléments de notre topologie en affirmant que les ouverts de $\mathcal{F}(X, Y)$ sont les complémentaires des fermés de $\mathcal{F}(X, Y)$.

Remarque les "" utilisés autour du mot *fermé* dans la définition précédente sont là pour préciser l'idée qu'il nous faut montrer que les ensembles ainsi définis vérifient bien les axiomes d'une topologie et sont donc bien des fermés.

Démonstration

- Il est clair que l'ensemble vide et $\mathcal{F}(X,Y)$ tout entier sont des "fermés" de $\mathcal{F}(X,Y)$.
- Soit $(F_i)_{i=1..n}$ une famille finie de fermés de $\mathcal{F}(X,Y)$. Montrons que F , la réunion des éléments de cette famille, est encore un fermé de $\mathcal{F}(X,Y)$. Soit donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de F et $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ la limite de cette suite. Il existe un fermé F_{i_0} de notre famille de fermés qui contient une infinité de termes de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (Si cette dernière affirmation était fautive, chaque F_i contiendrait un nombre fini d'éléments de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $i=1..n$ et donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne pourrait prendre qu'un nombre fini de "valeurs". Nécessairement f serait une de ses "valeurs" et f serait élément de F cqfd.) En extrayant de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des éléments de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont éléments de F_{i_0} , on fabrique une sous suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ incluse dans F_{i_0} . Mais toute sous suite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite que la suite de départ. Donc la sous suite est convergente. Mais F_{i_0} étant "fermé" la limite f de notre sous suite est dans F_{i_0} . et donc est élément de F .
- Vérifions le dernier axiome de la topologie . Soit donc maintenant $(F)_{i \in I}$ une famille quelconque de "fermés" de $\mathcal{F}(X,Y)$. Montrons que F , l'intersection de tout les éléments de cette famille est encore un "fermé". Soit donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de F et soit $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ sa limite. Pour tout $i \in I$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans F_i . Mais chaque F_i étant "fermé", la limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de F_i . f est donc élément de F_i pour tout $i \in I$ et est donc élément de l'intersection de tout les éléments de cette famille F .

On peut maintenant affirmer que nos "fermés" sont bien des fermés.

3 Topologie de la convergence uniforme

X désigne un ensemble et $(Y, \|\cdot\|)$ désigne un k -espace vectoriel normé ($k=\mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

On s'intéresse à $\mathcal{B}(X,Y) = \{f : X \rightarrow Y / \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty\}$.

Remarque On s'intéresse souvent dans la pratique à des ensembles X munis d'une topologie les rendant compacts. On considérera alors, en lieu et place de $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues de X dans Y (continues pour les topologies respectives de X et Y). Dans ce cas, en raison du fait que l'application $x \rightarrow \|f(x)\|$ est continue (composée d'application continue), que X muni de sa topologie est compact et que tout fonction continue à valeurs réelles et définie sur un compact est bornée, on a: $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$.

Définition On définit sur $\mathcal{B}(X,Y)$ une lois externe par $\cdot : k \times \mathcal{B}(X,Y) \rightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ $(\nu, f) \rightarrow \nu \cdot f$ où $\nu \cdot f$ est l'application de X dans Y qui a $x \in X$ associe $\nu \cdot f(x)$.

On définit aussi sur $\mathcal{B}(X, Y)$ une lois interne par $+: \mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$, $(f, g) \rightarrow f + g$, où $f + g$ désigne l'application qui à tout x de X associe l'élément $f(x) + g(x)$. ($+$ désigne ici la lois interne de Y).

Proposition $\mathcal{B}(X, Y)$ munis de la lois interne et de la lois externe précédemment définie est un k -espace vectoriel.

Démonstration Il suffit de remarquer que, en vue des axiomes définissant une norme, une somme de fonction bornées est bornée et le produit d'une fonction bornée par un scalaire est encore une fonction bornée. Les autres axiomes d'espace vectoriel se démontrent facilement.

Définition On suppose ici que X est muni d'une topologie qui le rend compact. On définit sur $\mathcal{C}(X, Y)$ une lois externe par $\cdot: k \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ (ν, f) $\rightarrow \nu \cdot f$ où $\nu \cdot f$ est l'application de X dans Y qui a $x \in X$ associe $\nu \cdot f(x)$. On définit aussi sur $\mathcal{C}(X, Y)$ une lois interne par $+: \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, $(f, g) \rightarrow f + g$, où $f + g$ désigne l'application qui à tout x de X associe l'élément $f(x) + g(x)$. ($+$ désigne ici la lois interne de Y).

Proposition En supposant que X est muni d'une topologie le rendant compact, $\mathcal{C}(X, Y)$ est sous k -espace vectoriel de $\mathcal{B}(X, Y)$ pour les lois internes et externes définis précédemment.

Démonstration La somme de deux fonctions continues définies d'un espace topologique X dans un espace vectoriel normé Y est une application continue. De même le produit d'un scalaire et d'une fonction ainsi définie est aussi une application continue.

Définition Si $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $f \in \mathcal{C}(X, Y)$), on pose:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Proposition L'application $\|\cdot\|$ précédemment définie est une norme sur $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$).

Démonstration Choisissons f et g dans $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$). Par définition de $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$), $\|\cdot\|$ est une application bien définie sur $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$). (Elle est à valeur dans \mathbb{R} et non dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$). $\|\cdot\|$ est même à valeur dans \mathbb{R}^+ . De plus: $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \forall x \in X \Leftrightarrow f \equiv 0$, ce qui prouve le premier axiome d'une norme.

D'autre part, si $\lambda \in k$, $\|\lambda f\| = \sup_{x \in X} \|\lambda f(x)\| = \sup_{x \in X} |\lambda| \|f(x)\| = |\lambda| \sup_{x \in X} \|f(x)\| = |\lambda| \|f\|$.

Ce qui nous permet de valider le deuxième axiome d'une norme.

Enfin, $\|f + g\| = \sup_{x \in X} \|(f + g)(x)\| \leq \sup_{x \in X} (\|f\| + \|g\|) \leq \sup_{x \in X} \|f(x)\| + \sup_{x \in X} \|g(x)\| = \|f\| + \|g\|$.

Ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

Corollaire $\mathcal{B}(X, Y)$ et $\mathcal{C}(X, Y)$ sont des espaces vectoriels normés.

Définition Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans Y . Soit f une application pareillement définie. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément vers f** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x \in X \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Proposition Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonction sur X qui converge uniformément vers f définie sur X alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Démonstration Il suffit de comparer la définition de la convergence simple et celle de la convergence uniforme pour les fonctions.

Proposition On a l'équivalence (avec les notations de la définition précédente)

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour le norme $\| \cdot \|$ de $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$).

Démonstration Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X . Soit $\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon) \|f_n - f\| < \varepsilon \iff \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon) \sup_{x \in X} \|f_n - f\| < \varepsilon \iff \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon) \forall x \in X \|f_n - f\|(x) < \varepsilon \iff$ et ε étant quelconque, ceci est équivalent au fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme de $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$).

Ceci nous amène à la définition suivante:

Définition La topologie sur $\mathcal{B}(X, Y)$ (resp. $\mathcal{C}(X, Y)$) héritée de la norme $\| \cdot \|$ est appelée **topologie de la convergence uniforme**.

Remarque Le fait que la convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple de cette suite a comme conséquence que la topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie de la convergence simple.

4 Quelques théorèmes

Théorème Soient (X, \mathcal{O}) un espace topologique et (Y, δ) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de X dans Y et qui converge uniformément vers $f : X \rightarrow Y$. On suppose de plus que les applications f_n sont continues $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $f : X \rightarrow Y$ est continue.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Donnons nous x un élément de X . On cherche un voisinage V de x dans X tel que si y est élément de V alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire nous permet d'écrire, pour tout x et y dans X et tout n dans \mathbb{N} ,

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f_n(x)) + \delta(f_n(x), f_n(y)) + \delta(f_n(y), f(y)).$$

Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , on peut trouver un entier N indépendant de x et y tel que si $n > N$ alors $\delta(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$ et $\delta(f(y), f_n(y)) < \varepsilon/3$. Choisissons donc $n > N$. f_n est par définition continue. Il existe donc un voisinage V de x (c'est le voisinage que l'on cherche) tel que $y \in V \Rightarrow \delta(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$. En utilisant l'inégalité précédente, on trouve $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ si y est élément de V . Cqfd

Théorème Soit (X, O) un espace topologique. Si (Y, d) est un espace métrique complet alors il en est de même de $\mathcal{B}(X, Y)$. Si de plus X est muni d'une topologie le rendant compact, alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est complet.

Démonstration Nous allons procéder à la démonstration de la complétude de $\mathcal{C}(X, Y)$. Nous supposons donc que X est compact. La démonstration de la complétude de $\mathcal{B}(X, Y)$ est absolument identique. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(X, Y)$. Cela se traduit par:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|$, ceci implique que pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y . Y étant complet, chaque suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans Y . Notons $f(x)$ la limite d'une telle suite. Ceci permet de définir une application f de X dans Y . La convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est pour l'instant seulement une convergence simple. Montrons qu'elle est uniforme. Le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy permet d'écrire, rappelons le:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ et le N correspondant dans l'écriture ci dessus. Comme l'application norme et l'application différence sont continues, on peut écrire

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| = \|f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)\| = \|f_n(x) - f(x)\|.$$

La dernière égalité étant réalisée car $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f . Supposons que n est plus grand que N . On obtient, pour tout x dans X et tout m plus grand que n : $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$. Cette inégalité reste vraie quand on passe à la limite comme précédemment et donc pour tout n plus grand que N et tout x dans X , $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Ceci prouve le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Dans le cas où l'on veut démontrer la complétude $\mathcal{C}(X, Y)$, il faut encore démontrer que f est continue. Ceci est vrai car si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors f est continue. Dans le cas où l'on veut démontrer la complétude de $\mathcal{B}(X, Y)$, il faut encore démontrer que f est bornée. Mais sachant que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}(X, Y)$, alors $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans \mathbb{R} . (on utilise l'inégalité $|||a| - |b||| \leq |||a+b|||$). Et les termes d'une suite de Cauchy dans \mathbb{R} sont majorés dès que l'on dépasse un certain rang. Donc les éléments de $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ sont majorés par une quantité $M \in \mathbb{R}$ dès que n est assez grand. Cela s'écrit, $\|f_n\| \leq M$ si n est assez grand. L'application norme étant continue et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f , on obtient, en passant à la limite: $\|f\| \leq M$ et f est bien élément de $\mathcal{B}(X, Y)$.

Corollaire Soit (X, \mathcal{O}) un espace topologique. Si (Y, d) est un espace métrique complet alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace de Banach. Si X est muni d'une topologie le rendant compact, alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Démonstration C'est immédiat: on a déjà démontré que ces deux ensembles sont des espaces vectoriels normés. On vient de montrer qu'ils sont complets. Par application du théorème précédent, ils sont complets. Ce sont donc des espaces de Banach.