

تمرين 1

- 1- حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i} + \frac{(1-2i)^2}{i}$
- 2- أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$
- 3- أحسب $\sum_{k=0}^{521} i^k$

تمرين 2

- في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$
- 1- نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ و $i \neq z$ و $z \neq 1$
- حدد الشكل الجبري للعددين $\frac{1-z}{1+iz}$ و $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot z}$
- 2- حدد (E) مجموعة النقط B حيث A و B و C نقط مستقيمة
- 3- حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot z}$ عدد تخيلي صرف.

تمرين 3

- حل في \mathbb{C} المعادلات التالية $2i \cdot \bar{z} + z = 1$ و $(1-i)z - 2\bar{z} = 1-5i$
- و $2|z|^2 - z^2 = 3$ و $z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 4-3i$

تمرين 4

- في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين
- $|z-2|=|z+2i|-2$ و $|z-1+i|=3$

تمرين 5

- أكتب على الشكل المثلثي الأعداد عقدية $3+i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $(1-i\sqrt{3})^{24}$

تمرين 6

- نعتبر العددين العقدين $u=2-2i$ و $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$
- 1- احسب معيار وعمدة كل من u و v
- 2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتج $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$

تمرين 7

- نضع $u=-2+2i$
- 1- أحسب معيار وعمدة u
- 2- حل جبريا $z^2 = u$ و استنتج $\cos \frac{3\pi}{8}$; $\sin \frac{3\pi}{8}$

تمرين 8

- نعتبر العدد العقدي $z=1+i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمرين 9

1- ليكن $z_0 = \left[1; \frac{2\pi}{5}\right]$ نضع $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$

أ- بين أن $1 + \alpha + \beta = 0$

ب- استنتج أن α و β حلبي المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$

2- أ- حدد α بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ واستنتج $\cos \frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و $A_4(z_0^4)$

حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمرين 10

1- بين أن $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$

2- $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. أحسب بدلالة $\tan \theta$ العدد $z = \frac{e^{i2\theta} - 1}{e^{i2\theta} + 1}$

تمرين 11

بين أن $e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2 \sin \frac{\pi}{22}}$

استنتج $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

تمرين 12

ليكن $(z; z') \in \mathbb{C}^2$. بين أن $|z - z'|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$

تمرين 13

ليكن $(x; \alpha) \in \mathbb{R}^2$

أحسب $C_n = \sum_{k=0}^n \sin(x + k\alpha)$ و $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(x + k\alpha)$ (يمكن حساب $C_n + iS_n$)

تمرين 14

اختصر الكتابة $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

تمرين 15

ليكن $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

نعتبر المعادلة (E) $(1 + iz)^3 (1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3 (1 + i \tan \alpha)$: $z \in \mathbb{C}$

1- ليكن z_0 حل للمعادلة (E)

أ- بين أن $|1 + iz_0| = |1 - iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

2- أ- أحسب $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$

ت- نضع $z = \tan \theta$ حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. استنتج حلول المعادلة (E)

تمرين 16

نعتبر في \mathbb{C} الحدودية $P(z) = iz^3 - (-3+2i)z^2 + (-6+4i)z - 8i$

- 1- حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلا حقيقيا.
- 2- لتكن B و A و C صور جذور المعادلة $P(z) = 0$. بين أن المثلث ABC قائم الزاوية.

تمرين 17

نعتبر في \mathbb{C} الحدودية $P(z) = z^3 - (-1+4i)z^2 + (2-12i)z - 20 - 12i$

1- حدد جبريا الجذرين المربعين للعدد $-27 + 36i$

2- بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا وحدده.

3- حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$

4- لتكن B و A و C صور جذور المعادلة $P(z) = 0$

بين أن B و A و C نقط مستقيمة

تمرين 18

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + 2(1 + \cos \theta)z + 2(1 + \cos \theta) = 0$ حيث $\theta \in]-\pi; \pi[$ (E)

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار و عمدة جذري المعادلة (E) (ناقش حسب قيم θ)

تمرين 19

1- حدد الجذور المكعبة للعددين $u = \sqrt{3} + i$ و $v = 8i$

2- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - (\sqrt{3} + 9i)z - 8(1 - i\sqrt{3}) = 0$

استنتج حلول المعادلة $z^6 - (\sqrt{3} + 9i)z^3 - 8(1 - i\sqrt{3}) = 0$

تمرين 20

1- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^5 + 1 = 0$

2- أنشئ صور z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 جذور المعادلة $z^5 + 1 = 0$

أ- بين أن $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

ب- استنتج أن $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

تمرين 21

1- أكتب على الشكل المثلثي الحلول الثلاثة لكل من المعادلتين $z^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ و $z^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2- حل في \mathbb{C} المعادلة $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$

تمرين 22

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع $u = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

1- اثبت أن $[2\pi]$ $\arg u \equiv -\arg z + 2\arg(z-i)$ و $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$ وأن $|u| = |z|$

2- بين إذا كان $|z|=1$ فإن $u = -i$

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث u تخيلي صرف.

تمرين 23

نعتبر المعادلة (E) $z^2 + i(2^{\theta+1} \sin \theta)z - 2^{2\theta} = 0$ حيث $z \in \mathbb{C}$ حيث $\theta \in [0, 2\pi[$

- 1- حل المعادلة (E) و أكتب الحلين على شكلهما المثلثي
- 2- في المستوى العقدي نعتبر A و B صورتني حلي المعادلة (E)
- 3- حدد θ لكي يكون OAB مثلث متساوي الأضلاع

تمرين 24

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $E_n : z^n = (iz - 2i)^n$

حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1- حل في \mathbb{C} المعادلة (E_2)

2- أ- أكتب كلا من العددين $1+i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي.

ب- استنتج أن $1+i\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة (E_{12})

3-- أ- في المستوى العقدي، حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث z يحقق المعادلة (E_1)

ب- استنتج جميع حلول المعادلة (E_n) تكتب على الشكل $1+ai$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

تمرين 25

نعتبر $P(z) = (m-3)z^6 - m(3z^4 - 9z^2) - 81$

1- نفترض أن $m=0$ ، حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$ ثم أكتب الحلول على الشكلين المثلثي و الجبري .

2- نضع $m=4$

أ- حدد العددين a و b لكي يكون $P(z) = (z^2 - 9)(z^4 + az^2 + b)$

ب- حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$

ج- تحقق أن الحلول تكتب على الشكل $z_k = 3 \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}$

تمرين 26

نعتبر في \mathbb{C} الحدودية $P(z) = z^3 + 2(1-i\sqrt{3})z^2 + 2(1-i\sqrt{3})z - 8(1+i\sqrt{3})$

1- بين أن العدد $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $P(z) = 0$

2- حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$ (ليكن z_2 و z_3 الجذرين الآخرين)

3- لتكن A و B و C و D على التوالي صور الأعداد العقدية z_1 و z_2 و z_3 و $\frac{2}{z_1}$.

بين أن النقط A و B و C و D متداورة

تمرين 27

1- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-2 - 2i\sqrt{3}$

a. حل المعادلة $(E) : z \in \mathbb{C} \quad z^2 - (3+i\sqrt{3})z + 2(1+i\sqrt{3}) = 0$

2- نضع $u = (\overline{z_1})^2 + (\overline{z_2})^2$ حيث z_1 و z_2 هما حلا (E)

3- تحقق أن $u = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أعط الشكل المثلثي للعدد u

4- أثبت أن u^{2001} عدد حقيقي سالب

5- نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

مباشر $(o; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ النقط A و B و C صور الأعداد العقدية 2 و $1+i\sqrt{3}$ و $3+i\sqrt{3}$ على التوالي .

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين 28

نعتبر المعادلة (E) : $z \in \mathbb{C} \quad z^3 + (-2+i)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2 = 0$

- 1- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_1 مع تحديده
- 2- أ- حدد الجذرين المربعين لـ $-8+6i$
ب- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + (-1+i)z + 2 - 2i = 0$
- 3- حدد الجذرين الآخرين z_2 و z_3 للمعادلة (E).
- 4- أ- أنشئ النقط $A(z_1)$; $B(z_2)$; $C(z_3)$ في المستوى العقدي .
ب- حدد العدد a لحق M حيث $MA = MB = MC$

تمرين 29

نعتبر في \mathbb{C} المعادلتين

$$(E) \quad z^2 + (1+i)z + 2i = 0$$

$$(F) \quad z^3 + 2 - 2i = 0$$

- 1- حل المعادلة (E).
- 2- أ- تأكد أن $z_1 = 1+i$ جذر للمعادلة (F) ثم حدد الجذرين الآخرين z_2 و z_3 للمعادلة (F) في شكلهما الجبري.
ب- حدد جذور المعادلة (F) في شكلها المثلثي.

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث
$$\arg \left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \right) \equiv \frac{\pi}{2}$$

تمرين 30

- 1- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^3 = 1$ و أكتب جذورها في شكلها المثلثي ثم الجبري.
- 2- نعتبر في \mathbb{C} المعادلة (E) $z^3 = 2 - 11i$
أ- تأكد أن $z_0 = 2 - i$ حل للمعادلة (E).
ب- استنتج حلول المعادلة (E) بوضع $z = tz_0$ حيث t عدد عقدي.

تمرين 31

1- بين أن $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\} \quad \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2- استنتج أن حلول المعادلة $\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n} = e^{i\theta}$ كلها حقيقية حيث $\theta \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}^*$

3- نضع $n=2$; $\theta = \frac{\pi}{4}$

أ- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب- استنتج حلول المعادلة $\frac{(z-i)^2}{(z+i)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين 32

نعتبر المعادلة (E) التالية: $z \in \mathbb{C} \quad z^2 \cos^2 t - 4z \cos t + 5 - \cos^2 t = 0$ حيث $t \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

1- حل المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$

M_1 و M_2 هما صورتا حلي المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t في $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ و أنشئها في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

تمرين 33

في المستوى (P) العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ،
ليكن f التطبيق من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} المعرف بـ

$$\begin{cases} f(z) = \frac{2z(z + \bar{z})}{(z - \bar{z})^2} & ; z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ f(z) = 0 & ; z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

و ليكن F التطبيق في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(f(z))$

1- أثبت أن النقط O و M و M' مستقيمية

2- بين أن مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق هي الشلجم (Γ) الذي معادلته $y^2 = -x$

3- نضع $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in]-\pi; \pi[- \left\{ -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2} \right\}$

أ- حدد، حسب قيم θ معيار و عمدة العدد $f(z)$

ب- أكتب بدلالة θ ، الصيغة الجبرية للعدد $f(z)$

ج- بين أن صورة المستوى (P) بالتطبيق F هو الشلجم (Γ)

4- أعط طريقة لإنشاء صورة M بالتطبيق F

تمرين 34

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن $A(-2 + 3i)$ و $B(1 - 3i)$ نقطتين.

نعتبر $M(z)$ حيث $z \neq -2 + 3i$ نضع $z' = \frac{z - 1 + 3i}{z + 2 - 3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $(\widehat{MA; MB})$

ب- حدد و أنشئ المجموعتين

$$(E_1) = \left\{ M(z) / \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \right\}$$

$$(E_2) = \{ M(z) / |z'| = 2 \}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2