

## تمارين حول التكامل

### الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

#### تمرين 1

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\} \quad \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3} \quad \text{حيث } a ; b ; c \text{ حدد}$$

$$\int_0^2 \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx \quad \text{أحسب}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{4x^2 + 4x + 2} dx ; \int_0^1 \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx \quad \text{أحسب -2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{بين أن -3}$$

$$\int_0^x \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} dt \quad \text{أحسب}$$

#### تمرين 2

$$\int_0^{\ln 2} (x+2)e^{2x} dx \quad \int_0^1 x^2 \ln(x^2+1) dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad \text{-1 باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب}$$
$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx \quad \text{و}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx \quad \text{-2 حدد الدالة الأصلية لـ } x \rightarrow \sin^3 x \text{ التي تنعدم في } 0 \text{ على } \mathbb{R} \text{ ثم أحسب}$$

#### تمرين 3

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \quad \text{نعتبر}$$

$$I_1 \quad \text{-1 أحسب}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n \quad \text{-2 بين}$$

$$I_3 \quad I_2 \quad \text{-3 أحسب}$$

$$\int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x) e^x dx \quad \text{-4 أستنتج}$$

#### تمرين 4

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \text{-1 بين أن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \text{-2 استنتج}$$

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx \quad \text{-3 استنتج تأطيرا لـ إلى } 0,1.$$

#### تمرين 9

$$t = \sqrt{x} \quad \text{نضع} \quad \int_0^1 \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}} \quad \text{-1 أحسب}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{-2 أ- تحقق أن}$$

ب- نعتبر  $k \in [0;1]$  . باستخدام المكاملة بالأجزاء أحسب  $A_k = \int_k^1 \frac{2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$

حدد  $\lim_{x \rightarrow 0} A_k$

**تمرين 10**

1- أ- تأكد أن  $\frac{t^2 - t + 1}{t(t^2 + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + 1}$

ب- أحسب  $\int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} \frac{e^{2x} - e^x + 1}{1 + e^{2x}} dx$  نضع  $t = e^x$

2- أحسب  $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x + 1) dx$  باستخدام المكاملة بالأجزاء

**تمرين 11**

1- تأكد أن  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$

2- أحسب  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$  باستخدام المكاملة بالأجزاء حيث  $\alpha \in ]0;1[$

3- أحسب  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$

**تمرين 12**

نعتبر  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$  ;  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

1- أحسب  $I_1$  واستنتج  $I_3$  ;  $I_5$

2- أحسب  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$  واستنتج  $I_{n+2} - I_n$  بدلالة  $n$ .

3- أ- بين أن الدالة  $x \rightarrow \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$  دالة أصلية للدالة  $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$  على  $\left[ 0; \frac{\pi}{3} \right]$

ب- استنتج  $I_0$  ثم  $I_2$  ;  $I_4$