

**تمرين 1**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ  $u_1 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

- 1- أحسب  $u_2$  ;  $u_3$
- 2- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 2$
- 3- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  تزايدية .

**تمرين 2**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{4}{u_n} \right)$  و  $u_0 = \frac{5}{2}$

- 1- أحسب  $u_1$  ;  $u_2$
- 2- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$
- 3- بين أن  $(u_n)$  تناقصية و استنتج أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \frac{5}{2}$  .
- 4- أ- تأكد أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{u_n} \right) (u_n - 2)$   
 ب- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{10} (u_n - 2)$   
 ج- استنتج أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n - 2 \leq \left( \frac{1}{10} \right)^n \times \frac{1}{2}$  ثم حدد  $\lim u_n$

**تمرين 3**

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1- بين أن  $(v_n)$  متتالية ثابتة .
- 2- استنتج أن  $(u_n)$  متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب  $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$  بدلالة  $n$ . ثم أحسب  $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$  بدلالة  $n$ .

**تمرين 4**

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ

- 1- أحسب  $u_2$  ;  $u_3$
- 2- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 3$
- 3- أدرس رتبة  $(u_n)_{n \geq 1}$  و استنتج أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq 2$
- 4- نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ  $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

ب- أحسب  $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$  بدلالة  $n$ .

### تمرين 5

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المتتاليتين المعرفتين بما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5 - \frac{9}{u_n + 1} \end{cases} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

- 1- بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$   
2- حدد  $\lim u_n$

### تمرين 6

لتكن  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1- نضع  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = v_n - u_n$

- أ- بين أن  $(w_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية و أحسب  $w_n$  بدلالة  $n$   
ب- حدد  $\lim w_n$

2-- أ- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية تزايدية و أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية تناقصية

ب- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < v_n$

ج- استنتج أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  متقاربتين

### تمرين 7

لتكن  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي  $u_1 = 2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \quad ; \quad v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

1- أحسب  $u_2$  و  $u_3$  و  $v_2$

2- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq 3$

3- أدرس رتبة  $(u_n)_{n \geq 1}$

4- أ- بين أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$

ب- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$  ثم حدد  $\lim S_n$

### تمرين 8

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي  $v_n = u_{n+1} - u_n$  ;  $\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - 7u_n \end{cases}$

1- أحسب  $u_3$  و  $v_2$ .

2- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

3- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} v_i$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

### تمرين 9

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 2$ .

2- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية تزايدية و استنتج أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية متقاربة.

3- أ- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

ب- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ج- استنتج  $\lim u_n$

### تمرين 10

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$$

1- أحسب  $u_1$  و  $u_2$ .

2- بين أن  $(u_n)$  متتالية تزايدية.

3- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > 2u_n$  و استنتج  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3 \times 2^n$

4- أحسب  $\lim u_n$

### تمرين 11

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{5}{4} \\ u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2 \end{cases}$$

1- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 < u_n < -1$ .

2- بين أن  $(u_n)$  متتالية تناقصية.

3- استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة.

4- أحسب  $\lim u_n$ .

### تمرين 12

لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي  $v_n = u_{n+1} - u_n$  ;  $\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

1- أعط تعبير  $u_n$  بدلالة  $n$

2- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية بدون استعمال السؤال 1 و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

ثم أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} v_i$

3- نضع  $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

بين  $(w_n)$  ثابتة و استنتج أن  $u_{n+1} = 9u_n + 1$

$$4- \text{أحسب } S'_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} u_i$$

### تمرين 13

$$\begin{cases} u_0 = -1 ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بـ:}$$

1- أحسب  $u_2$  ;  $u_3$

2- نعتبر المتتاليتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$  حيث  $b_n = 2^n u_n$  ;  $a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

أ- بين أن  $(a_n)$  متتالية هندسية و أحسب  $a_n$  بدلالة  $n$

ب- بين أن  $(b_n)$  متتالية حسابية و أحسب  $b_n$  بدلالة  $n$

ت- استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$3- \text{أ- بين بالترجع } \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ب- حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$  ثم  $\lim u_n$