التمرين 1 :

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي:

$$f(x)=-x+\sqrt{\frac{x}{x-1}} .$$

1. أوجد $\mathcal{D}$ مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}$.
3. أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة 0 .

ب- حدد الدالة المشتقة للدالة f ، وتحقق من أن :

$$\forall x\in\mathcal{D}-\{0\} \quad : \quad f'(x)<0$$

4. أعط جدول تغيرات الدالة f .
5. في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f و المستقيم (D) ذا المعادلة : $y=-x+1$.

أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ والمستقيم (D) .

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$.

ج- حدد نقطتي تقاطع $(\mathcal{C})$ ومحور الأفاصيل.

د- أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}} .$$

1. أوجد $\mathcal{D}$ مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathcal{D}$ ، ثم حدد دالتها المشتقة .
4. أعط جدول تغيرات الدالة f .
5. في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، وحدة القياس 2 cm ، نعتبر المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x$ و ا لمنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f .

أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^* \quad : \quad 0<\frac{f(x)}{x}\le 1$.

ب- استنتج،حسب قيم x، الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C})$ محددا نقطتي تقاطع (Δ) و $(\mathcal{C})$

ج- أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$.

6. لتكن g الدالة العددية المعرفة من $[0,2]$ نحو المجال $\left[0,\sqrt{2}\right]$ بما يلي : $\forall x\in[0,2] \quad : \quad g(x)=f(x)$.

أ- بين أن g تقابل.

ب- أرسم المنحنى الممثل للدالة g^{-1} في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 3 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. حدد الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$.
3. حدد موقع المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة لمقاربه المائل.
4. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f . بين أن :

$$\forall x\in]1,+\infty[\quad : \quad f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

5. ضع جدول تغيرات الدالة f .
6. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm}$.

نقبل أن $(\mathcal{C})$ لا يقبل أية نقطة انعطاف .

7. ليكن g قصور الدالة f على المجال $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$.

أ- بين أن الدالة g تقابل من المجال $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب- ليكن g^{-1} التقابل العكسي للدالة g . أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة g^{-1} .

التمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{4+x^2} & ; \quad x\le 0 \\ f(x)=x\left(3-2\sqrt{x}\right) & ; \quad x>0 \end{cases} .$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$.

2. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .
4. أ- حدد تقاطع المنحنى $(\mathcal{C})$ مع محور الأفاصيل .

ب- أنشئ $(\mathcal{C})$.

5. ليكن g قصور الدالة f على $\mathbb{R}^-$.

أ- بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^-$ نحو $\mathbb{R}^-$.

ب- أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، منحنى الدالة g^{-1} .

جـ- بين أن : $g^{-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2+\sqrt{4+x^2}}} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^{-}$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{16x}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}$.

ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0.

ب- أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة .

2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وأول هندسيا النتيجة .

3. أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{16\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^5} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$.

ب- حدد جدول تغيرات الدالة f .

4. أ- أحسب $f''(x)$ ، لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$.

ب- حدد إحداثيتي I نقطة انعطاف $(\mathcal{C})$.

5. أنشئ $(\mathcal{C})$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث : $\|\vec{i}\|=2\,\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=6\,\text{cm}$

6. أ- بين أن f تقابل من المجال $I=]0,1[$ نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد قيمة : $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

التمرين 6 :

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية h لمتغير حقيقي حيث : $h(x)=3x-4x\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}$.

1. أعط جدول تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^{+}$.
2. استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+} \quad : \quad h(x)\le 0$.

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي : $f(x)=(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+\dfrac{1}{2}$.

$(\mathcal{C})$ يرمز إلى منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\Re=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

الوحدة هي : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,\text{cm}$.

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $x_0=0$ ، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

2. أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{2h(x)}{\sqrt{x}} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$.

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f . لحساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$ ، يمكنك استعمال المتساوية :

$f(x)=x^2\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-4+\dfrac{1}{2x^2}\right) \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+*}$.

جـ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C})$.

3. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right[$.

أ- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0 \quad : \quad x\in I$ تقبل حلا وحيدا α ، ثم تحقق من أن : $\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{3}{4}$.

4. أنشئ في نفس المعلم $\Re$ ، المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f والمنحنى (Γ) الممثل للدالة العكسية g^{-1} للدالة g. نقبل أن للمنحنى $(\mathcal{C})$ نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\dfrac{1}{4}$.

التمرين 7 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-x}$.

وليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها المبياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\Re=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ- بين أن: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} \quad : \quad \forall x\in]1,+\infty[$.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة $x_0=1$، وأول النتيجة هندسيا.

3. أ- بين أن: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \quad : \quad \forall x\in]1,+\infty[$

ب- بين أن : $f'(x)<0 \quad : \quad \forall x\in]1,+\infty[$.

جـ- أعط جدول تغيرات الدالة f .

4. بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها α بحيث : $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$.

5. أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

ب- بين أن المستقيم الذي معادلته $y=-x+\dfrac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$.

6. أنشئ $(\mathcal{C})$.

7. أ- بين أن f تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده.

ب- أنشئ (Γ) منحنى الدالة العكسية f^{-1} في $\Re$.