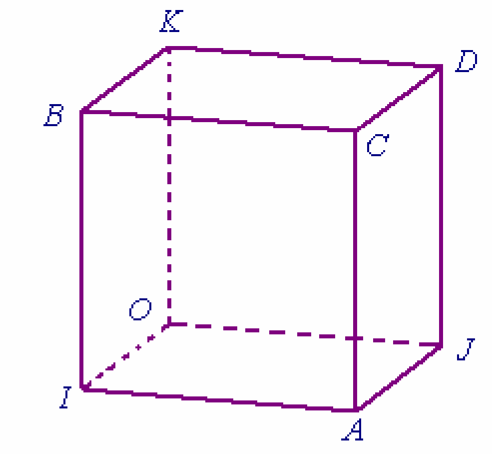
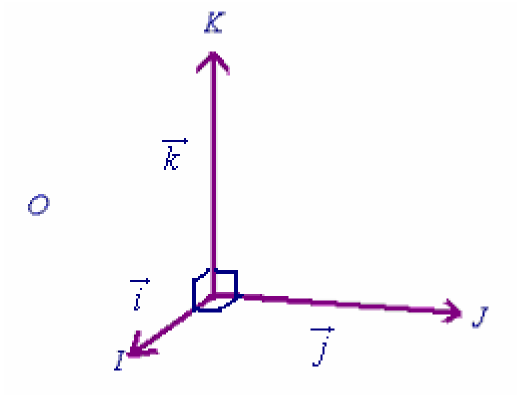
## I. تعريف :

**1. مثال :** ليكن $OIAJKBCD$ مكعبا حيث $OI=1$ . الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، حيث : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$ .




1. أعط مثلثوث إحداثيات :

**أ-** النقط : $O$ و $I$ و $J$ و $K$ و $A$ و $B$ و $C$ و $D$ .

ب- المتجهتين : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OC}$ .

2. نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، النقطة $E(1,2,0)$ .

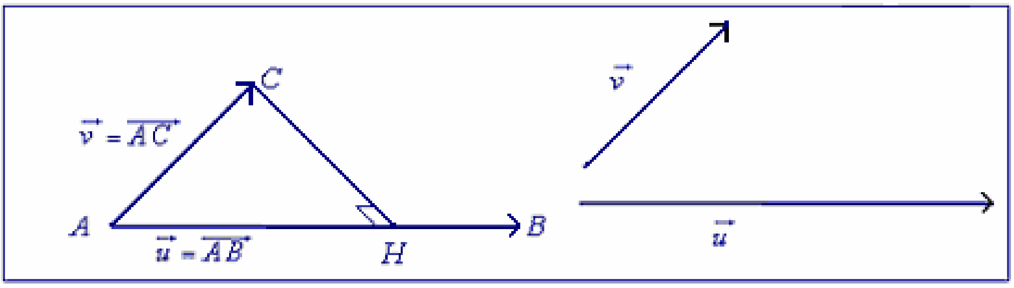
أ- تحقق من أن النقطة $A$ منتصف القطعة $[IE]$ ؛ ثم أنشئ النقطة $E$.

ب- أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IE}$ .

### 2. تعريف :

أ- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من $\mathcal{V}_3$ ، ولتكن $A$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

توجد نقطتان وحيدتان من $(\mathcal{E})$ بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ .




الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي : $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}}$ .

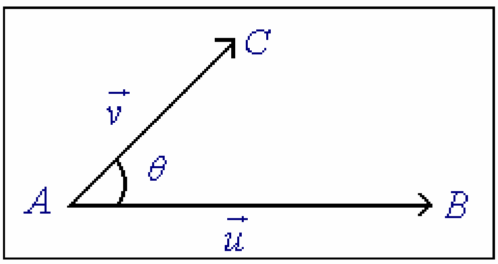
حيث $H$ هو المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$ .

ب- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ ، فإن $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=0}$ .

### 3. خاصية : « الصيغة المثلثية للجداء السلمي »

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من $\mathcal{V}_3$ ، ولتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلاث نقط من الفضاء $(\mathcal{E})$ بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ ، وليكن $\theta$ قياسا للزاوية الهندسية $[B\hat{A}C]$ .

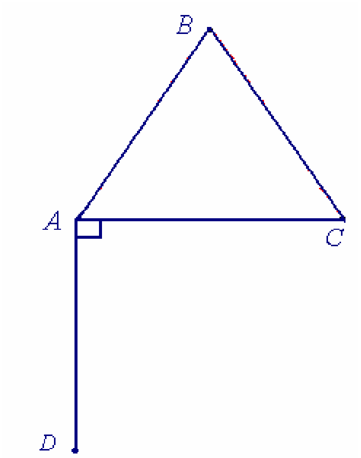
لدينا :




$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= AB\times AC\times\cos(\theta)\\ \vec{u}.\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\theta)\end{aligned}}$$

مثال : ليكن $ABC$ مثلثا متساوي الأضلاع

حيث : $AB=3$.




أحسب : (a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

(b $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

(c $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

**ملاحظة :** الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{AC}^2$

ولدينا : $AC^2=\overrightarrow{AC}^2$ . أي : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=\overrightarrow{AC}^2$ .

### 4. خاصيات :

أ- لكل $A$ و $B$ من $(\mathcal{E})$ ، لدينا : $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$ . ومنه : $\boxed{AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}}$ .

ب- لكل متجهة $\vec{u}$ من $\mathcal{V}_3$ ، لدينا: $\left\|\vec{u}\right\|^2=\vec{u}^2$ . ومنه : $\boxed{\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}^2}}$ .

جـ- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $\mathcal{V}_3$، لدينا $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \text{ أو } \vec{v}=\vec{0} \text{ أو } \vec{u}\perp\vec{v}}$.

د- لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من $\mathcal{V}_3$، ولكل $\alpha$ من $\mathbb{R}$ ، لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \vec{u}.\vec{v} & = & \vec{v}.\vec{u} \\ \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) & = & (\vec{u}.\vec{v})+(\vec{u}.\vec{w}) \\ (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} & = & (\vec{u}.\vec{w})+(\vec{v}.\vec{w}) \\ \vec{u}.(\alpha\vec{v}) & = & \alpha(\vec{u}.\vec{v}) \end{array}}$$

هـ- لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $\mathcal{V}_3$، لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (\vec{u}+\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 \\ (\vec{u}-\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2 \\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) & = & \vec{u}^2-\vec{v}^2 \end{array}}$$

مثال : لكل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من $\mathcal{V}_3$، بحيث : $\left\|\vec{u}\right\|=3$ و $\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{3}$ و $\vec{u}.\vec{v}=-5$ .

1. أحسب $(\vec{u}+\vec{v})^2$ ثم استنتج $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|$ .

2. أ- أحسب $(\vec{u}+2\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$ . ب- ماذا تستنتج ؟

## II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

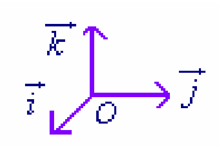
### 1. الأساس والمعلم :

**تعريف :**

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية من الفضاء $\mathcal{V}_3$ و لتكن $O$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

✓ نقول إن المثلوث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **أساس متعامد ممنظم** للفضاء $\mathcal{V}_3$ ، إذا كان :

$\vec{i}\perp\vec{j}$ و $\vec{j}\perp\vec{k}$ و $\vec{k}\perp\vec{i}$ و $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1$



✓ إذا كان $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساسا متعامدا ممنظما للفضاء $\mathcal{V}_3$ ، فإننا نقول :

إن المربوع $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ **معلم متعامد ممنظم** للفضاء $(\mathcal{E})$.

## 2. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

في كل ما يلي ، الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ .

لتكن $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$ . لدينا :

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right).\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx'\vec{i}^2+xy'\vec{i}.\vec{j}+xz'\vec{i}.\vec{k}+yx'\vec{j}.\vec{i}+yy'\vec{j}^2+yz'\vec{j}.\vec{k}+zx'\vec{k}.\vec{i}+zy'\vec{k}.\vec{j}+zz'\vec{k}^2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

لأن : $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$ .

**خلاصة :**

إذا كانت $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتين من الفضاء $\mathcal{V}_3$ ، فإن :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$$

## 3. نتائج :

أ- لكل متجهة $\vec{u}(x,y,z)$ من $\mathcal{V}_3$ ، لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ . ومنه فإن :

$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ب- لكل نقطتين $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ ، لدينا:

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ . ومنه فإن منظم المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو:

$$\boxed{AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

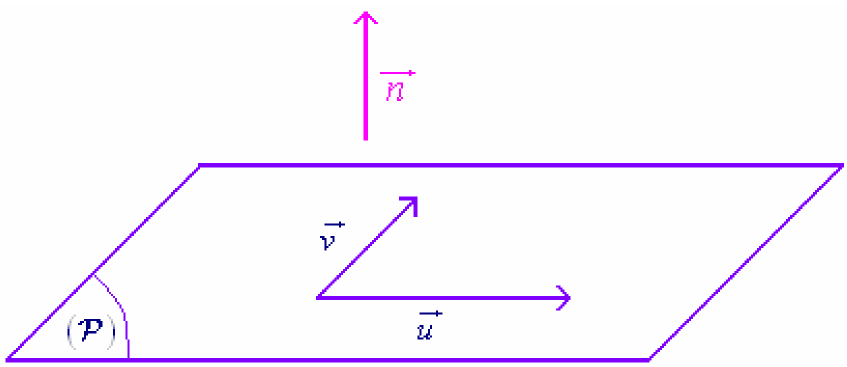
**مثال :** لتكن $A(1,0,1)$ و $B(1,0,0)$ و $C(1,1,1)$ ثلاث نقط من الفضاء $(\mathcal{E})$ . بين أن $ABC$ مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة $A$ .

# III. تطبيقات :

## 1. متجهة منظمية على مستوى :

في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، نعتبر المستوى $(\mathcal{P})$ الموجه بمتجهتين غير مستقيميتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء $\mathcal{V}_3$.

كل متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ من $\mathcal{V}_3$ متعامدة مع $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، تسمى متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$



**ملاحظات :** أ- كل مستوى يقبل ما لا نهاية له من المتجهات المنظمية عليه.
ب- إذا كانت $\vec{n}$ متجهة منظمية على مستوى $(\mathcal{P})$ ، فإن $\vec{n}$ متعامدة مع كل متجهة $\overrightarrow{AB}$ حيث $A$ و $B$ نقطتين من المستوى $(\mathcal{P})$ .

2. معادلة مستوى محدد بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، المستوى $(\mathcal{P})$ المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ حيث $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية عليه. $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ . لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$ . لدينا :

$$\begin{aligned} M\in(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \\ &\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \end{aligned}$$

حيث : $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$ .

**أ- خاصية :** المستوى $(\mathcal{P})$ المار من نقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية عليه، يقبل معادلة ديكارتية على الشكل : $ax+by+cz+d=0$ .

**ب- مثال :** أكتب معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ المارمن النقطة $E(2,-1,3)$ و $\vec{n}(5,2,1)$ منظمية عليه .

3. تعامد مستقيمين :

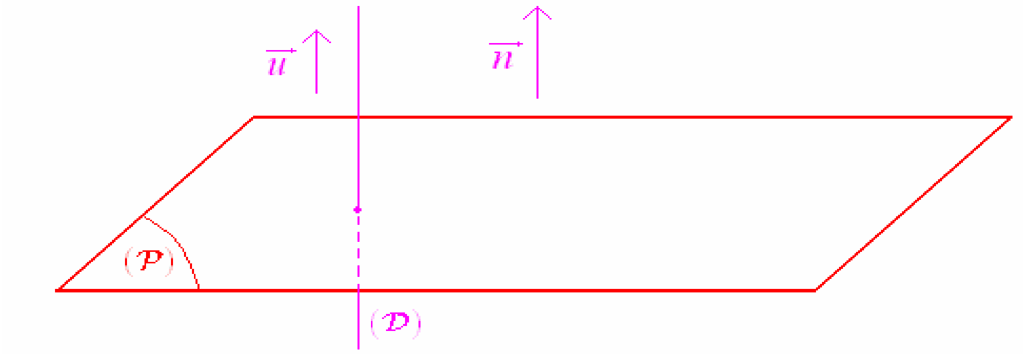
ليكن $(\mathcal{D})$ مستقيما مارا من نقطة $A$ وموجها بمتجهة $\vec{u}$ و ليكن $(\mathcal{D}')$ مستقيما مارا من نقطة $B$ و موجها بمتجهة $\vec{v}$ . لدينا :

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathcal{D})\perp(\Delta) &\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \end{aligned}}$$

4. تعامد مستقيم ومستوى :

ليكن $(\mathcal{D})$ مستقيما مارا من نقطة $A$ وموجها بمتجهة $\vec{u}$ و ليكن $(\mathcal{P})$ مستوى مارا من نقطة $B$ و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه . لدينا :

$\boxed{(\mathcal{D})\perp(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{n} \text{ مستقيميتان}}$ .

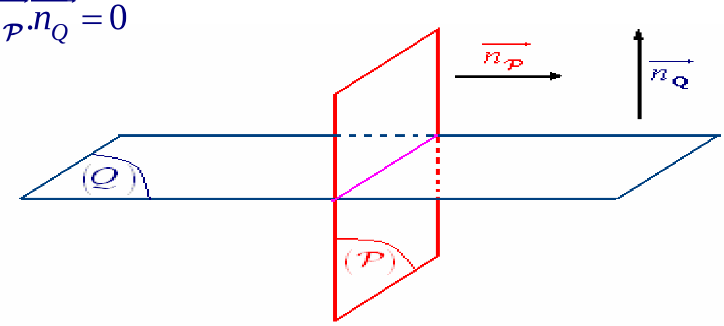



5. تعامد مستويين :

ليكن $(\mathcal{P})$ مستوى مارا من نقطة $A$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ متجهة منظمية عليه وليكن $(Q)$ مستوى مارا من نقطة $B$ و $\vec{n}_Q$ متجهة منظمية عليه . لدينا :

$$(\mathcal{P})\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{\mathcal{P}}\perp\vec{n}_Q$$

$$(\mathcal{P})\perp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{\mathcal{P}}.\vec{n}_Q=0$$



**تمرين تطبيقي :**

نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$، المستوى $(\mathcal{P})$ والمستقيم $(\mathcal{D})$ حيث :

$$(\mathcal{D}) \ : \ \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 5 \\ z = -1+6t \end{cases} \quad / \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (\mathcal{P}) \ : \ x - 3z + 4 = 0$$

أ- بين أن : $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$ .

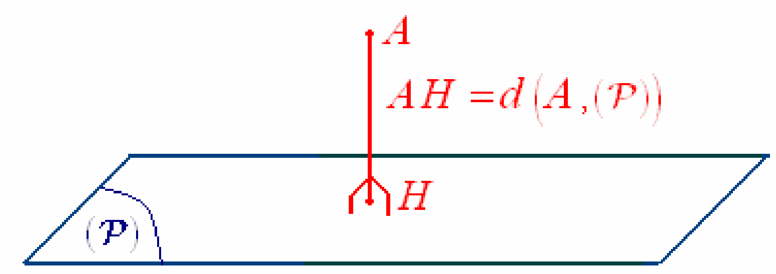
ب- نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$، المستوى $(Q) \ : \ 3x + y + z + 1 = 0$ . بين أن : $(\mathcal{P}) \perp (Q)$ .

## 6. مسافة نقطة عن مستقيم :

**خاصية :**

نعتبر في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ والمستوى $(\mathcal{P}): \ ax + by + cz + d = 0$ . مسافة النقطة $A$ عن المستوى $(\mathcal{P})$ هي :

$$\boxed{d(A,(\mathcal{P})) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$




**برهان :**

نعتبر $H(x, y, z)$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوى $(\mathcal{P})$ . لدينا :

$\overrightarrow{AH}(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ و $\vec{n}(a, b, c)$ متجهتان منظميتان على المستوى $(\mathcal{P})$ . إذن :

$\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ متجهتان مستقيميتان. أي : $\overrightarrow{AH} = t\vec{n} \quad / \quad \exists t \in \mathbb{R}$ . ومنه فإن : $\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}$ . وبما أن $H \in (\mathcal{P})$ ، فإن: $a(x_A + t.a) + b(y_A + t.b) + c(z_A + t.c) + d = 0$

نستنتج من ذلك أن : $ax_A + by_A + cz_A + t(a^2 + b^2 + c^2) + d = 0$ أي : $t = -\dfrac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.

وبالتالي فإن مسافة النقطة $A$ عن المستوى $(\mathcal{P})$ هي : $d(A,(\mathcal{P})) = AH$ . ولدينا :

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \|t\vec{n}\| = |t|\|\vec{n}\| = \left| -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

**مثال :** في الفضاء $(\mathcal{E})$ ، نعتبر النقطتين $A(-1, 2, \sqrt{5})$ و $B(3,1,0)$ والمستوى $(\mathcal{P}): \ 4x + 2y + \sqrt{5}z - 14 = 0$ . أحسب :

أ- المسافة $d(A,(\mathcal{P}))$ . ب- المسافة $d(B,(\mathcal{P}))$ . ماذا تستنتج ؟