

Orientation de l'espace

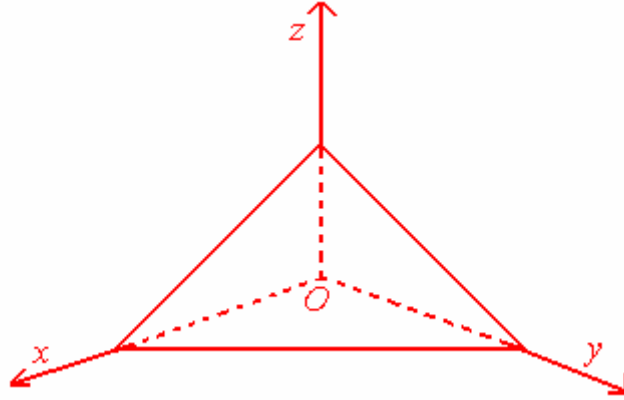
Tetraèdre :

-I توجيه الفضاء :

1. ثلاثي الأوجه :

تعريف :

ثلاثة أنصاف مستقيم في الفضاء  $(Ox)$  و  $(Oy)$  و  $(Oz)$  وغير مستوائية ، تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه ، نرسم له بالرمز  $(Ox, Oy, Oz)$  .  
 $(Ox)$  و  $(Oy)$  و  $(Oz)$  تسمى أحرف ثلاثي الأوجه .

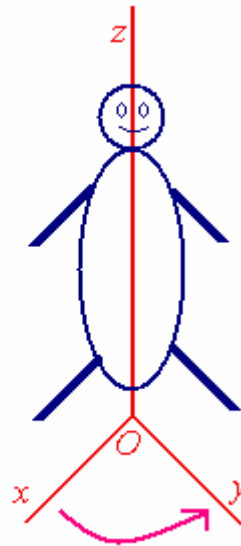
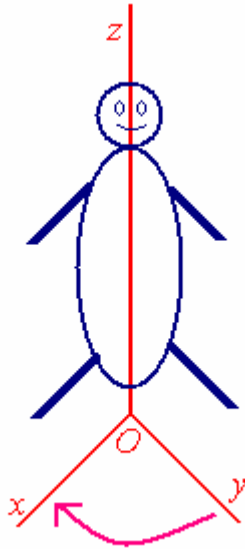


Le Bonhomme d'Ampère :

2. رجل أمبير :

تعريف :

رجل أمبير لثلاثي الأوجه  $(Ox, Oy, Oz)$  هو شخص خيالي محمول على الحرف  $(Oz)$  ، رجلاه في الأصل  $O$  ، ويرى الحرف  $(Ox)$  .  
 يوجد موضعان للحرف  $(Oy)$  بالنسبة لرجل أمبير :  
 ➤ الحرف  $(Oy)$  عن يساره .  
 ➤ الحرف  $(Oy)$  عن يمينه .



3. منحى ثلاثي الأوجه وتوجيه الفضاء :

اتفاق : لما يكون رجل أمبير على الحرف  $(Oz)$  ورجلاه في  $O$  وهو يرى الحرف  $(Oy)$  عن يساره ،نقول إن ثلاثي الأوجه  $(Ox, Oy, Oz)$  مباشر ( أو موجب ) .

بهذا نكون قد وجهنا الفضاء إلى صنفين :

صنف ثلاثي أوجه مباشر .

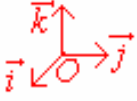
صنف ثلاثي أوجه غير مباشر .

4. معلم موجه في الفضاء :

نعتبر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلما في الفضاء  $(\mathcal{E})$  . نضع :  $\vec{i} = \overline{OI}$  و  $\vec{j} = \overline{OJ}$  و  $\vec{k} = \overline{OK}$  .

تعريف :

يكون  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلما مباشرا للفضاء  $(\mathcal{E})$  إذا كان ثلاثي الأوجه  $(OI, OJ, OK)$  مباشرا .



Les Bases directes :

5. الأسس المباشرة :

تعريف :

ليكن  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  أساسا للفضاء  $\mathcal{V}_3$  . ولتكن  $O$  نقطة من الفضاء  $(\mathcal{E})$  . إذا كان  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلما مباشرا للفضاء  $(\mathcal{E})$  ، فإننا نقول إن  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  أساس مباشر للفضاء  $\mathcal{V}_3$  .

Orientation d'un Plan dans l'espace :

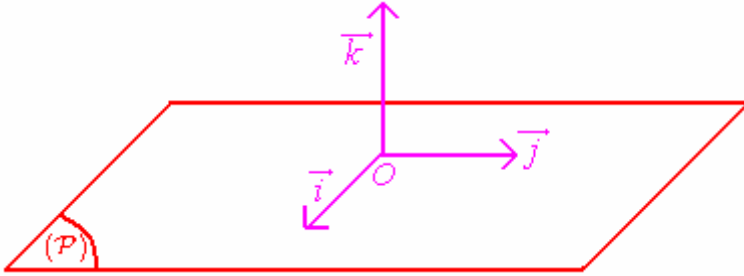
6. توجيه مستوى في الفضاء :

نعتبر  $(\mathcal{P})$  مستوى في الفضاء  $(\mathcal{E})$  ، و  $\vec{k}$  متجهة واحدة منتظمة على المستوى  $(\mathcal{P})$  .

من نقطة  $O \in (\mathcal{P})$  ، ننشئ معلما متعامدا ممنتظما  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  للفضاء  $(\mathcal{E})$  .

يكون المعلم المتعامد الممنتظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  مباشرا في المستوى  $(\mathcal{P})$  ، إذا كان المعلم المتعامد

الممنتظم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  مباشرا في الفضاء  $(\mathcal{E})$  .



توجيه مستوى  $(\mathcal{P})$  في الفضاء  $(\mathcal{E})$  ، يتم بتوجيه متجهة  $\vec{k}$  منتظمة عليه .

Produit Vectoriel de deux vecteurs :

II. الجداء المتجهي لمتجهتين :

1. تعريف :

في الفضاء الموجه ، نعتبر  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين ونعتبر  $O$  نقطة من الفضاء  $(\mathcal{E})$  .

نعلم أن :  $\exists!(A, B) \in (\mathcal{E})^2 / \vec{u} = \overline{OA}$  و  $\vec{v} = \overline{OB}$  .

✓ إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  ، في

هذا الترتيب ، هو المتجهة  $\vec{w}$  التي تحقق ممثلتها  $\overline{OC}$  الشروط التالية :

•  $(OC) \perp (OAB)$  .

• ثلاثي الأوجه  $(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$  مباشر .

•  $\| \overline{OC} \| = \| \overline{OA} \| \times \| \overline{OB} \| \times \sin(\theta)$  ، حيث  $\theta$  هو قياس الزاوية الهندسية  $[A \hat{O} B]$  .

✓ إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  ، في هذا الترتيب ، هو المتجهة المنعدمة  $\vec{0}$   
 ✓ نرسم للجداء المتجهي لمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  ، في هذا الترتيب ، بالرمز  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  أو  $(\vec{u} \times \vec{v})$  ونقرأ :  $\vec{u}$  متجهي  $\vec{v}$  .

**ملاحظتين :** أ- لكل متجهتين غير منعدمتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  من الفضاء  $\mathcal{V}_3$  ، لدينا :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$$

ب- إذا كان  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$  ، فإن المثلوث  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  أساس مباشر للفضاء  $\mathcal{V}_3$  .

**مثال :** أحسب  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  في كل من الحالتين التاليتين :

أ-  $\|\vec{u}\| = 10$  و  $\|\vec{v}\| = 2$  و  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$  .

ب-  $\|\vec{u}\| = 6$  و  $\|\vec{v}\| = 6$  و  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  .

2. تطبيق : بين متساوية Lagrange :  $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 : \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$  .

3. خاصيات :

أ- لكل  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}_3^3$  ، لدينا :  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{w} \perp \vec{v}$  .

ب- تخالف الجداء المتجهي :  $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 : \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$  .

ج- خطانية الجداء المتجهي :  
 خاصية :

لتكن  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  و  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  و  $\vec{v}$  متجهات من الفضاء  $\mathcal{V}_3$  ، وليكن  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  .

•  $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$  .

•  $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2)$  .

•  $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$  .

•  $\vec{u} \wedge (\beta \vec{v}) = \beta (\vec{u} \wedge \vec{v})$  .

د- انعدام الجداء المتجهي ( شرط استقامية متجهتين ) :

خاصية :

يكون الجداء المتجهي لمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  منعدما إذا وفقط إذا كانت المتجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان .

**برهان :** لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  $\mathcal{V}_3$  . نضع :  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  . لدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta) = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \text{ أو } \|\vec{v}\| = 0 \text{ أو } \sin(\theta) = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0} \text{ أو } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ لهما نفس الاتجاه ( )}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

نتيجة :

في الفضاء الموجه ، لدينا :  
 $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow [A, B, C \text{ نقط مستقيمة}]$

تطبيق : ليكن  $ABC$  مثلثا .

1. بين أن :  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \overline{CA} \wedge \overline{CB} = \overline{BC} \wedge \overline{BA}$

2. استنتج علاقة الأحياب الثلاثة في المثلث  $ABC$  :  

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{BC} = \frac{\sin(\widehat{B})}{CA} = \frac{\sin(\widehat{C})}{AB}$$

III. تحليلية الجداء المتجهي :

1. خاصية وتعريف :

ليكن  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  أساسا متعامدا ممنظما للفضاء  $\mathcal{V}_3$  .

لتكن  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  و  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  متجهتين من الفضاء  $\mathcal{V}_3$  . لدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

برهان : نعلم أن :  $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$  و  $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$  و  $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$  و  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$  و  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  و  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

إذن :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

وبالتالي فإن :  $\vec{u} \wedge \vec{v} \left( \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$  بالنسبة للأساس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

تطبيق : في الفضاء الموجه  $(\mathcal{E})$  ، نعتبر النقط  $A(1,0,2)$  و  $B(-1,1,1)$  و  $C(3,2,0)$  .

1. حدد مثلث إحداثيات المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  .

2. استنتج أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمة .

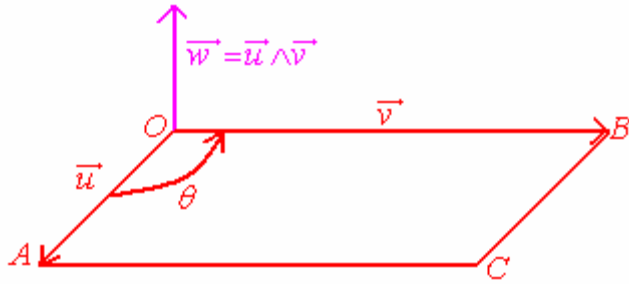
3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  .

IV. تطبيقات : Applications :

1. مساحة مثلث- مساحة متوازي الأضلاع : Aire d'un Triangle, d'un Parallélogramme:

في الفضاء  $(\mathcal{E})$ ، نعتبر متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقا من المتجهتين  $\overline{OA}$  و  $\overline{OB}$  ؛ ولتكن  $S$  مساحته .

نعلم أن مساحة المثلث  $AOB$  هي :



$$s = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin(\theta)$$

$$s = \frac{1}{2} \|u\| \times \|v\| \times \sin(\theta)$$

$$s = \frac{1}{2} \|u \wedge v\|$$

ومنه فإن مساحة متوازي الأضلاع  $OACB$  هي :  $S = 2s = \|u \wedge v\|$ .

### خاصية 1 :

✓ مساحة مثلث  $ABC$  في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و

$$s = \frac{1}{2} \|AB \wedge AC\| \quad \text{مباشر هي :}$$

### خاصية 2 :

✓ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقاً من متجهتين غير منعدمتين  $u$  و  $v$  في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي :

$$S = \|u \wedge v\|$$

✓ مساحة متوازي الأضلاع  $ABCD$  هي :  $S = \|AB \wedge AD\|$

### 2. معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية :

#### خاصية :

ليكن  $(ABC)$  مستوى في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر.

لدينا  $\vec{n} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متجهة منظمية على المستوى  $(ABC)$ . إذن :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

**مثال :** في الفضاء  $(\mathcal{E})$  المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر النقط

$$A(5,2,0) \text{ و } B(3,5,-1) \text{ و } C(-2,-3,1)$$

1. بين أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمية .

2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  .

### 3. تقاطع مستويين :

في الفضاء  $(\mathcal{E})$  المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر المستويين :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0 \text{ و } (Q) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

لدينا :  $\vec{n}(a,b,c)$  متجهة منظمية على المستوى  $(P)$  و

$\vec{n}'(a',b',c')$  متجهة منظمية على المستوى  $(Q)$  .

نفترض أن :  $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$  . إذن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  موجه بالمتجهة  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$  .

لتحديد نقطة من المستقيم  $(\Delta)$  ، نستعمل معادلتين المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  .

**مثال :** حدد تقاطع المستويين التاليين :  $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$  و  $(Q) : 4x - 4y + 2z - 5 = 0$  .

#### 4. مسافة نقطة عن مستقيم :

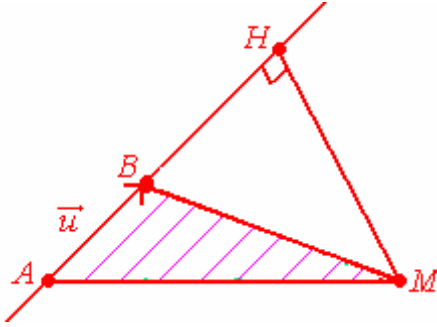
#### Distance d'un point à une droite :

في الفضاء  $(\mathcal{E})$  المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيما  $D(A, \vec{u})$  و نعتبر  $M$  نقطة مسقطها العمودي  $H$  على المستقيم  $D(A, \vec{u})$  .

مساحة المثلث  $ABM$  هي :  $S = \frac{1}{2} AB \times HM$  ولدينا :  $S = \frac{1}{2} \|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|$  . إذن :

$AB \times HM = \|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|$  . أي :  $\|\vec{AB}\| \times HM = \|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|$  ومنه نستنتج أن :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = HM = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$



**خاصية :** المسافة بين نقطة  $M$  من الفضاء  $(\mathcal{E})$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  و مستقيم  $D(A, \vec{u})$  هي :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

**مثال :** في الفضاء  $(\mathcal{E})$  المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، حدد المسافة بين

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} / t \in \mathbb{R} \text{ والنقطة } M(3, 2, -1) \text{ والمستقيم}$$

#### 5. المسافة بين مستقيمين ( إضافة ) : : Distance entre deux droites(Compléments)

في الفضاء  $(\mathcal{E})$  المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيمين غير مستوائيين  $D(A, \vec{u})$  و  $D(B, \vec{v})$  . المسافة بين المستقيمين  $D(A, \vec{u})$  و  $D(B, \vec{v})$  هي :

$$d(D(A, \vec{u}), D(B, \vec{v})) = \frac{\|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

**مثال :** ليكن  $(D)$  المستقيم المار من النقطة  $A(1, 0, -1)$  والموجه بالمتجهة  $\vec{u}(0, 1, 1)$  . وليكن  $(D')$  المستقيم المار من النقطة  $B(-1, 0, 0)$  والموجه بالمتجهة  $\vec{v}(1, 0, 2)$  .  
 1. بين أن المستقيمين  $(D)$  و  $(D')$  غير مستوائيين .  
 2. أحسب المسافة بين المستقيمين  $(D)$  و  $(D')$  .

**تمرين :** بين أن :  $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{U}_3 : \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \wedge \vec{v}) \vec{w}$



بالتوفيق إنشاء الله



