

Fonctions Exponentielles :

I. الدوال الأسية النبيرية :

1. تعريف :

نعلم أن \ln دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. إذن \ln تقابل من المجال

$$]0, +\infty[\text{ نحو المجال }]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \text{ . } J = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

الدالة العكسية للدالة \ln تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بالرمز \exp ، ولدينا :

$$\exp = \ln^{-1} \text{ و } \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto \exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

2. ملاحظات :

✓ \exp دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. $(\exp = \ln^{-1})$

✓ نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0 \text{ ✓}$$

✓ مجموعة تعريف الدالة \exp هي \mathbb{R} .

3. قاعدة التحويل :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall y \in \mathbb{R} : \ln x = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

$$\ln(1) = 0 \Rightarrow \exp(0) = 1$$

$$\ln(e) = 1 \Rightarrow \exp(1) = e$$

$$\ln(e^2) = 2 \Rightarrow \exp(2) = e^2$$

مثال :

4. خاصيات :

لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $y \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $r \in \mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \text{ و } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(rx) = (\exp(x))^r \text{ و } \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

برهان :

نضع : $a = \exp(x)$ و $b = \exp(y)$. إذن : $x = \ln(a)$ و $y = \ln(b)$ و $a > 0$ و $b > 0$.

ولدينا : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = x + y$ و $ab > 0$. إذن : $ab = \exp(x + y)$. أي :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

5. كتابة جديدة ل $\exp(x)$:

نعلم أن : $\ln(e^r) = r$: $\forall r \in \mathbb{Q}$. إذن : $\exp(r) = e^r$: $\forall r \in \mathbb{Q}$. ثم نمدد هذه العلاقة إلى \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$$

نتيجة :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0} ; \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty} \quad (i)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[; \forall y \in \mathbb{R} : \boxed{\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y} \quad (ii)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} ; \forall r \in \mathbb{Q} : \quad (iii)$$

$$\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{x+y} = e^x e^y}$$

$$\boxed{e^{rx} = (e^x)^r ; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$$

(iv) لدينا :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp(x) = e^x$$

7. نهايات هامة :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0} ; \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

برهان :

نعتبر $t = e^x$. لدينا : $t \rightarrow +\infty$. إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t}} = +\infty$

ولدينا : $t \rightarrow 0^+$. إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = -\infty$

ولدينا : $t \rightarrow 1$. إذن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{\ln(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t - 1}} = 1$

مثال : أحسب النهايات التالية :

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} ; B = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x ; A = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

$$F = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} ; E = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) ; D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x}$$

8. خاصيات :

خاصية 1 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[: e^{\ln(x)} = x}$$

خاصية 2 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} :}$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$$

مثال : 1. حل في \mathbb{R} المعادلة : $(E): e^x - 5 + 6e^{-x} = 0$

2. حل في \mathbb{R} المراجعة : $(I): e^x - 5 + 6e^{-x} > 0$

الجواب :

1. نضرب طرفي المتعادلة (E) في e^x فنجد :

$$(E) \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \quad / \quad t = e^x$$

ولدينا : $\Delta = 1$. إذن : $t = 2$ أو $t = 3$. وبالتالي فإن :

$$(E) \Leftrightarrow e^x = 2 \quad \text{أو} \quad e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) \quad \text{أو} \quad x = \ln(3)$$

وبالتالي فإن : $S = \{\ln(2), \ln(3)\}$

2. بنفس الطريقة ، نجد :

$$(F) \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 < 0 \quad / \quad t = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2 < t < 3 \quad / \quad t = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2 < e^x < 3$$

$$(F) \Leftrightarrow \ln(2) < x < \ln(3)$$

وبالتالي فإن : $S =]\ln(2), \ln(3)[$

II. مشتقة الدالة الأسية : Dérivée de la fonction Exponentielle :

1. الدالة المشتقة للدالة \exp :

لدينا : $]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R} : \exp = \ln^{-1}$.

✓ \ln دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

✓ $\forall x \in]0, +\infty[: \ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$.

إذن : $\exp = \ln^{-1}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال : $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ ، ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1}(x)}} = \ln^{-1}(x) = \exp(x)$$

وبالتالي فإن : $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$.

خاصية :

\exp دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$$

2. مشتقة مركبة exp ودالة قابلة للاشتقاق على مجال :

خاصية :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . إذن :
 $x \mapsto e^{u(x)}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال I ، ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left(e^{u(x)} \right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

لأن : $(e^{u(x)})' = (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times \exp'(u(x)) = u'(x) \times \exp(u(x)) = u'(x) \times e^{u(x)}$

. $\forall x \in \mathbb{R} : (e^{-x})' = (x)' e^{-x} = -e^{-x}$ مثال :

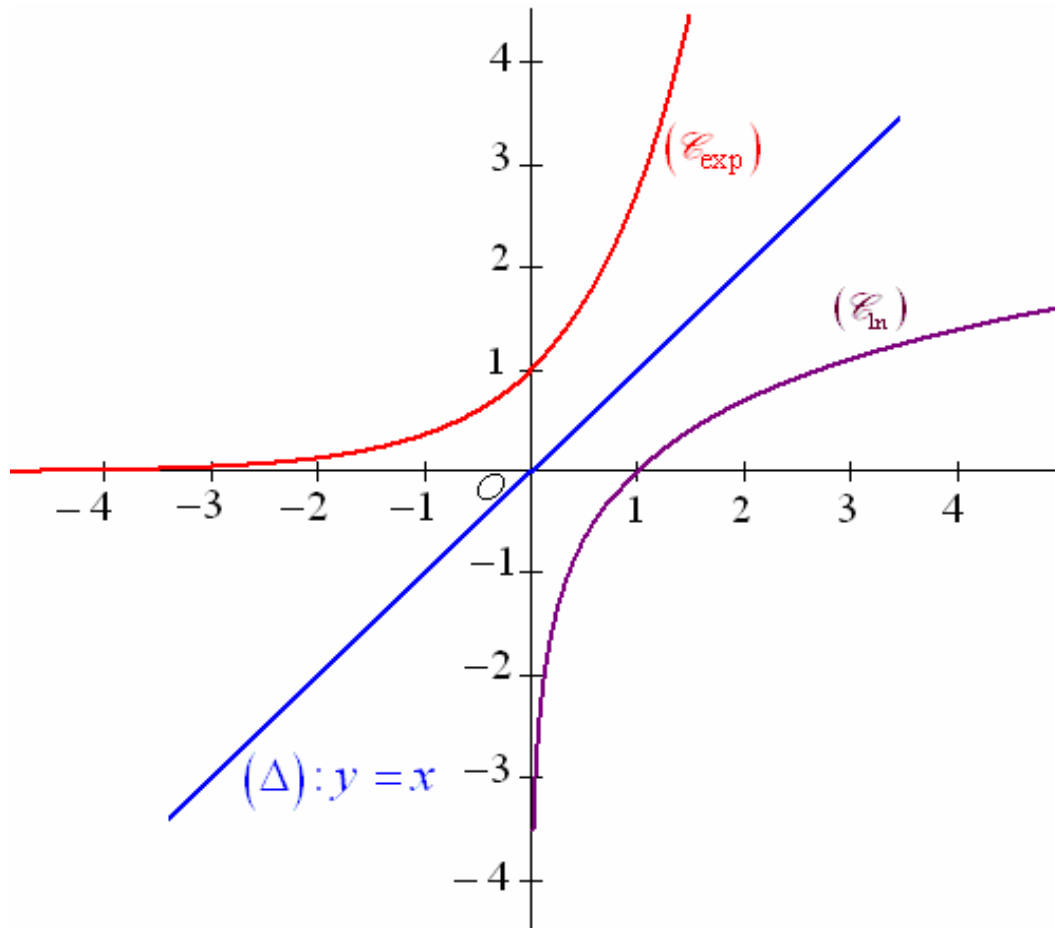
. $\forall x \in \mathbb{R} : (e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$

3. منحنى الدالة exp :

جدول تغيرات الدالة exp :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

منحنى الدالة exp :



1. تعريف :

ليكن $a > 0$ و $a \neq 1$. نعلم أن \log_a تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} .
التقابل العكسي للدالة \log_a يسمى الدالة الأسية للأساس a ، ونرمز لها
بالرمز \exp_a ولدينا:

$$\exp_a = \log_a^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp_a(x) = \log_a^{-1}(x)$$

2. قاعدة التحويل :

$$\forall x \in]0, +\infty[; \forall y \in \mathbb{R} : \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = \exp_a(y)$$

مثال :

$$\log_a(1) = 0 \Rightarrow \exp_a(0) = 1$$

$$\log_a(a) = 1 \Rightarrow \exp_a(1) = a$$

$$\log_a(a^2) = 2 \Rightarrow \exp_a(2) = a^2$$

3. كتابة جديدة لـ $\exp_a(x)$:

ليكن $a > 0$ و $a \neq 1$. لدينا : $\forall r \in \mathbb{Q} : \log_a(a^r) = r$. إذن : $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp_a(r) = a^r$.

يمكن أن نعمم هذه النتيجة كما يلي : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a(x) = a^x$. إذن :

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$

4. خاصيات :

ليكن $a > 0$ و $a \neq 1$.

لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $y \in \mathbb{R}$ ولكل $r \in \mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$$

$$\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} ; \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$$

ولكل $a > 0$ ولكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $y \in \mathbb{R}$ ولكل $r \in \mathbb{Q}$ ، لدينا :

$$a^{rx} = (a^x)^r ; 1^x = 1 ; a^{x+y} = a^x \times a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y ; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} ; a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

برهان : نضع : $\alpha = \exp_a(x)$ و $\beta = \exp_a(y)$.
 إذن : $x = \log_a(\alpha)$ و $y = \log_a(\beta)$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$.
 ومنه فإن : $\log_a(\alpha\beta) = \log_a(\alpha) + \log_a(\beta) = x + y$ و $\alpha\beta > 0$.
 إذن : $\exp_a(x + y) = \alpha\beta = \exp_a(x)\exp_a(y)$...

قاعدة التحويل تصير : $\forall x \in]0, +\infty[; \forall y \in \mathbb{R} : \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$

مثال : لدينا : $3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3(2) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

$$3^x = 2 \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3(2)$$

لاحظ أن :

5. كتابة جديدة لـ $\exp_a(x)$:

أ- ليكن $a > 0$ و $a \neq 1$. ليكن $x \in \mathbb{R}$. نضع : $y = \exp_a(x)$. إذن :

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow x \ln a = \ln y$$

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

نتيجة 1 : لكل $a > 0$ و $a \neq 1$ ، لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$

مثال : لدينا : $3^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5} \ln 3}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$$

ب- نتيجة 2 : لكل $a > 0$ ، لدينا :

لاحظ أنه تم تمديد النتيجة 1 بإضافة الحالة $a = 1$.

6. مشتقة الدالة $\exp_a(x)$ حيث $a > 0$ و $a \neq 1$:

ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $\exp_a'(x) = (e^{x \ln a})' = (x \ln a)' e^{x \ln a} = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) \exp_a(x)$

نتيجة 1 : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a'(x) = \ln(a) \exp_a(x)$

نتيجة 2 : $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = \ln(a) \times a^x$

مثال : لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : (2^x)' = (\ln 2) \times 2^x > 0$

IV. تمارين تطبيقية :

تمرين تطبيقي رقم 1 :

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & ; x < 1 \\ f(x) = x-1 - \frac{\ln(x)}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- بين أن f متصلة في 1.

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق f في 1.

ب- بين أن $\forall x \in]-\infty, 1[: f'(x) = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$.

ج- تحقق من أن f تزايدية قطعاً على المجال $]1, +\infty[$.

د- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- تحقق من أن المستقيم $y = x - 1$: (D) مقارب للمنحنى (\mathcal{E}_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس

الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{E}_f) والمستقيم (D).

ب- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$.

4. أنشئ المنحنى (\mathcal{E}_f) .

الحل :

1. أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$

ب- دراسة اتصال الدالة f في 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = 0 = f(1) \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \times e^t = 0 = f(1)$ وذلك بوضع $t = \frac{1}{x-1}$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ ومنه فإن f متصلة في 1.

2. أ- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في 1 :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - \frac{\ln x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{1}{x} = 1 - 1 = 0$$

ف f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $f'_d(1) = 0$. ومنه فإن المنحنى (\mathcal{E}_f) يقبل نصف

مماس أفقي (T_d) على اليمين في النقطة ذات الأضلاع 1 معادلته :

$$(T_d) : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} y = f'_d(1)(x-1) + f(1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ حيث $t = \frac{1}{x-1}$

إذن : f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 و $f'_g(1) = 0$. ومنه فإن المنحنى (\mathcal{E}_f) يقبل نصف

مماس أفقي (T_g) على اليسار في النقطة ذات الأضلاع 1 معادلته :

$$(T_g) : \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} : \text{أي} . \begin{cases} y = f'_g(1)(x-1) + f(1) \\ x \leq 1 \end{cases}$$

وبما أن $f'_g(1) = f'_d(1) = 0$ ، فإن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1) = 0$.

ومنه نستنتج أن للمنحنى (\mathcal{E}_f) مماس أفقي (T) في النقطة ذات الأضلاع 1 معادلته :

$$(T) : \begin{cases} y = 0 \end{cases} : \text{أي} . y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ب- ليكن $x \in]-\infty, 1[$ ، لدينا :

$$f'(x) = \left((x-1)e^{\frac{1}{x-1}} \right)' = (x-1)' e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1) \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right)' = e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1) \left(\frac{1}{x-1} \right)' e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} \left[1 + (x-1) \left(-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} \right) \right]$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} \left[1 - \frac{1}{x-1} \right]$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-1} \right) e^{\frac{1}{x-1}}$$

ج- ليكن $x \in]1, +\infty[$ ، لدينا :

$$f'(x) = \left(x-1 - \frac{\ln x}{x} \right)' = 1 - 0 - \frac{(\ln x)' x - (\ln x) x'}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1) + \ln x}{x^2}$$

لدينا $x > 1$. إذن : $\ln x > 0$ و $x+1 > 0$ و $x-1 > 0$ و $x^2 > 0$. إذن : $f'(x) > 0$.

وبالتالي فإن : f تزايدية قطعاً على المجال $]1, +\infty[$.

د- ليكن $x \in]-\infty, 1[$ ، لدينا : $f'(x) = \left(\frac{x-2}{x-1} \right) e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

و بما أن $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ و $x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 < -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{x-1} > 0$

فإن : $f'(x) > 0$: $\forall x \in]-\infty, 1[$. ومنه نستنتج أن f تزايدية قطعاً على المجال $]-\infty, 1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3. أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$. إذن (\mathcal{E}_f) يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار

$+\infty$ معادلته $y = x - 1$.

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{E}_f) والمستقيم (D) :

ليكن $x \in]1, +\infty[$. لدينا : $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln x}{x} < 0$. إذن (\mathcal{E}_f) يوجد تحت (D) على المجال $]1, +\infty[$.

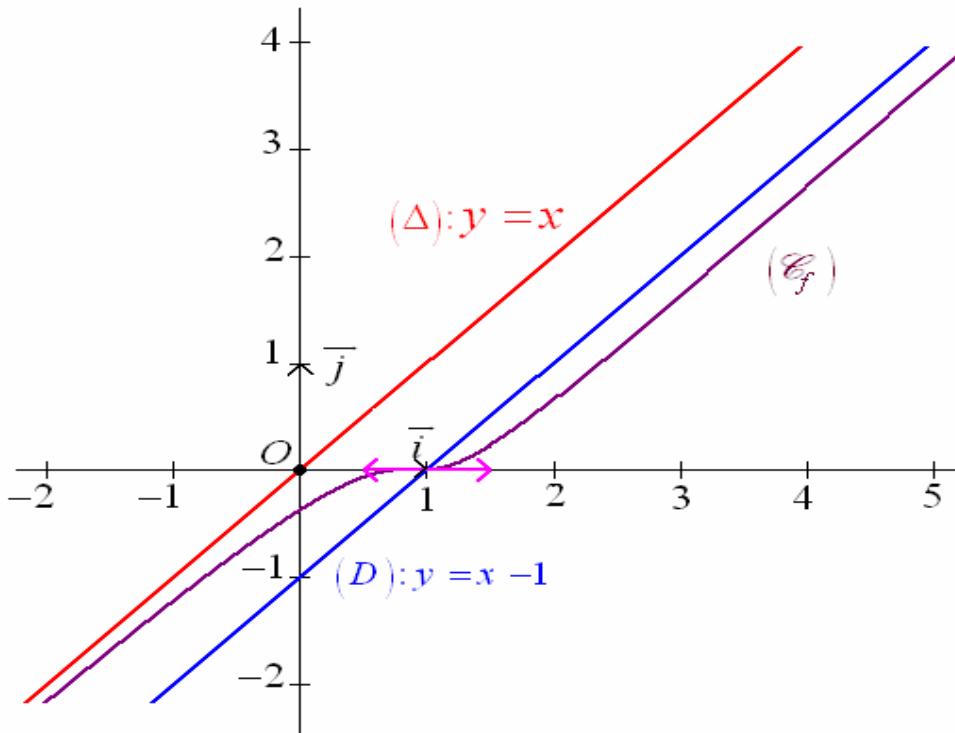
ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{t} - \left(\frac{1}{t} + 1\right)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - 1 = 1 - 1 = 0$$

وذلك بوضع $t = \frac{1}{x-1}$ حيث $t \rightarrow 0$.

ومنه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}_f) بجوار $-\infty$.

4. إنشاء المنحنى (\mathcal{E}_f) :



تمرين تطبيقي رقم 2 :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

الجزء الأول : لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1. حدد \mathcal{D}_g حيز تعريف الدالة g .
2. أحسب نهايات g عند محددات \mathcal{D}_g .
3. حدد $g'(x)$ لكل x من \mathcal{D}_g ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة g .
4. استنتج أن : $\forall x \in \mathcal{D}_g : g(x) > 0$.

الجزء الثاني :

1. حدد \mathcal{D}_f حيز تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محددات \mathcal{D}_f ، وأول النتائج المحصلة هندسيا .
3. أدرس اتصال الدالة f على اليمين في 0 .
4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ، وأول النتائج المحصلة هندسيا .
5. حدد $f'(x)$ لكل x من $\mathcal{D}_f - \{0\}$ ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .
6. أنشئ المنحنى (\mathcal{E}_f) .

الحل :

الجزء الأول :

1. حيز تعريف الدالة g : $\mathcal{D}_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ و } x \neq 0 \right\}$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
x	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	-		+

وبالتالي فإن : $\mathcal{D}_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

2. نهايات الدالة g عند محددات \mathcal{D}_g :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln 1 - 0 = \boxed{0}$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty - 1 = \boxed{+\infty}$ لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$

نضع $t = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$. إذن : $t \rightarrow 0^+$ و $x = \frac{1}{t-1}$. ومنه فإن : $x+1 = \frac{1}{t-1} + 1 = \frac{t}{t-1}$ و :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t - \frac{t-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \ln t - t + 1}{t} = \boxed{+\infty}$$

3. ليكن x من \mathcal{D}_g ، لدينا :

$$g'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right)' = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} - \left(-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

إشارة $g'(x)$ على \mathcal{D}_g هي إشارة $(-x)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+			-
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$			$+\infty$ ↘ 0

4. لدينا : g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]-\infty, -1[$. إذن :

$$g \left(]-\infty, -1[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) \right[=]0, +\infty[$$

ولدينا : g متصلة وتناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. إذن :

$$g \left(]0, +\infty[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[=]0, +\infty[$$

وبالتالي فإن : $g(x) > 0$: $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

الجزء الثاني :

$$1. \text{ حيز تعريف الدالة } f : \mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ و } x \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

$$=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\cup \{0\}$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

2. حساب نهايات f عند محداث \mathcal{D}_f :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \boxed{e}$$

. $\boxed{y=e}$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $\pm\infty$ معادلته \mathcal{E}_f . إذن $t = \frac{1}{x}$ ، حيث $t \rightarrow 0$.

$$\text{وبوضع } t = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ ، نجد } t \rightarrow +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 1 + \frac{1}{x} = 0^+ \text{ و } \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = \boxed{+\infty}$$

ومنه فإن \mathcal{E}_f يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=-1}$.

3. دراسة اتصال الدالة f على اليمين في 0 .

نضع : $t = \frac{1}{x}$. إذن : $t \rightarrow +\infty$ ، ومنه فإن :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln\left(t\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln t + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = e^0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

وبالتالي فإن الدالة f متصلة على اليمين في 0 .

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

نضع : $t = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. نعلم أن : $t \rightarrow 0$:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} t = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} + \frac{1}{u} \ln\left(\frac{1}{u} + 1\right) = 0, u = \frac{1}{x} \text{ بوضع } \right)$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ ، ولدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\text{ومنه نستنتج أن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \times +\infty = \boxed{+\infty}$$

وبالتالي فإن f غي رقابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

تأويل هندسي : (\mathcal{E}_f) يقبل نصف مماس رأسي على يمين النقطة ذات الأفصول 0 موجه نحو الأعلى .

5. ليكن x عنصرا من $\mathcal{D}_f - \{0\}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \right)' \\ &= \left(x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \right)' e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \left[x' \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \right)' \right] e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}} \right] e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} \right] e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

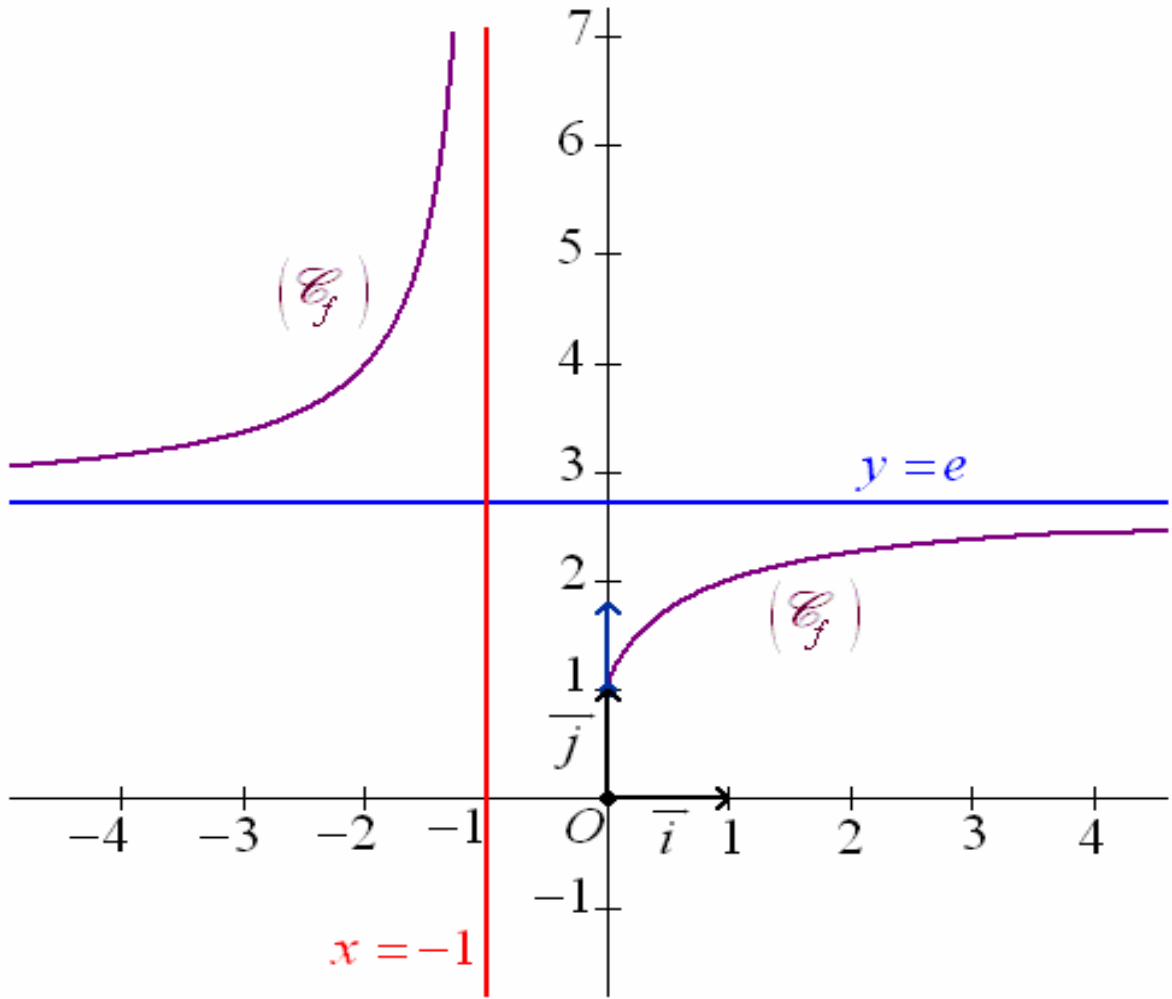
$$f'(x) = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$f'(x) = g(x) e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

وحسب السؤال 4 من الجزء الأول ، لدينا : $f'(x) > 0$: $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	e ↗ $+\infty$			1 ↗ e

6. إنشاء المنحنى (\mathcal{C}_f) :



بالتوفيق إنشاء الله

