

1. تعريف :

1. مبرهنة وتعريف :

توجد مجموعة \mathbb{Z}_2 تتضمن « وتحقق ما يلي :

أ. تحتوي المجموعة \mathbb{Z}_2 على عنصر غير حقيقي i بحيث : $i^2 = -1$

ب. كل عنصر من المجموعة \mathbb{Z}_2 يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $a+ib$ بحيث a و b عدنان حقيقيان.

ج. المجموعة \mathbb{Z}_2 ؛ مزودة بعمليتي الجمع والضرب؛ تمددان نفس العمليتين في « ولهما نفس الخصائص.

المجموعة \mathbb{Z}_2 تسمى مجموعة الأعداد العقدية. i est dit nombre de Gauss

2. مثال : نعتبر العددين العقديين : $z = 4+5i$ و $z' = 2+3i$. أحسب $z+z'$ و zz' .

2. تعريف :

i. لدينا : $\forall z \in \mathbb{Z}_2 ; \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2 / z = a+ib$

أي : $\mathbb{Z}_2 = \{a+ib / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

ii. الكتابة $z = a+ib$ ، حيث : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ، تسمى : الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد العقدي z .

iii. العدد الحقيقي a يسمى **الجزء الحقيقي** للعدد العقدي z ، ويرمز له بالرمز $\Re(z)$ ، ونكتب : $a = \Re(z)$.

iv. العدد الحقيقي b يسمى **الجزء التخيلي** للعدد العقدي z ، ويرمز له بالرمز $\Im(z)$ ، ونكتب : $b = \Im(z)$.

v. العدد العقدي ib ، حيث $b \in \mathbb{R}$ ، يسمى عددا تخيليا صرفا .

مجموعة هذه الأعداد يرمز لها بالرمز « i . لدينا : $i \mathbb{R} = \{ib / b \in \mathbb{R}\}$

$z \in i \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists! b \in \mathbb{R} / z = ib$

3. مثال : حدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد العقدية التالية :

(a) $z = 5+8i$ (c) $z = 1-2i$ (e) $z = -3+i$

(b) $z = 7$ (d) $z = -4i$ (f) $z = (2+i)i$

3. تساوي عددين عقديين :

خاصية :

ليكن $z = a+ib$ و $z' = a'+ib'$ عددين عقديين حيث : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و $(a',b') \in \mathbb{R}^2$.

$z = z' \Leftrightarrow [a = a' \text{ و } b = b']$

$z = z' \Leftrightarrow [\Re(z) = \Re(z') \text{ و } \Im(z) = \Im(z')]$

ملاحظات :

أ. $\forall z \in \mathbb{Z}_2 : z = 0 \Leftrightarrow [\Re(z) = 0 \text{ و } \Im(z) = 0]$

ب. $\forall z \in \mathbb{Z}_2 : z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$

ج. $\forall z \in \mathbb{Z}_2 : z \in i \mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$

11. العمليات في المجموعة \mathbb{C} :

1. خاصية :

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ عددين عقديين ، حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ و $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ ؛ و $\alpha \in \mathbb{R}$

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \text{لدينا :}$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$\alpha z = (\alpha a) + i(\alpha b)$$

2. متطابقات هامة :

ليكن z و z' عددين عقديين .
لدينا :

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$$

$$(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$$

$$(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$$

ولدينا :

$$(z + z')^3 = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$$

$$(z - z')^3 = z^3 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3$$

$$z^3 - z'^3 = (z - z')(z^2 + zz' + z'^2)$$

ملاحظة :

ليكن a و b عددين حقيقيين . لدينا :

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$$

تمرين تطبيقي :

1. أحسب : $(1+i)^2$ و $(1-i)^2$.

2. نضع : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. أحسب j^2 ثم $1 + j + j^2$.

b. استنتج قيمة j^3 ثم استنتج قيمة j^{2005} . j est dit nombre de Jacobi .

3. أكتب على الشكل الجبري ما يلي :

$$z = \frac{i}{j^2} \quad (c) \quad z = \frac{2-3i}{1-i} \quad (b) \quad z = \frac{-5+i}{3+2i} \quad (a)$$

4. حل في \mathbb{C} المعادلة التالية : $\frac{z+1}{z-1} = 2i$.

3. قوى العدد i :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{i^{4n} = 1} \quad \boxed{i^{4n+1} = i} \quad \boxed{i^{4n+2} = -1} \quad \boxed{i^{4n+3} = -i}$$

لدينا : $\boxed{i^2 = -1}$ و $\boxed{i^3 = -i}$ و $\boxed{i^4 = 1}$. إذن :

مثال : أحسب : (a) i^{2006} .
(b) $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2005}$.

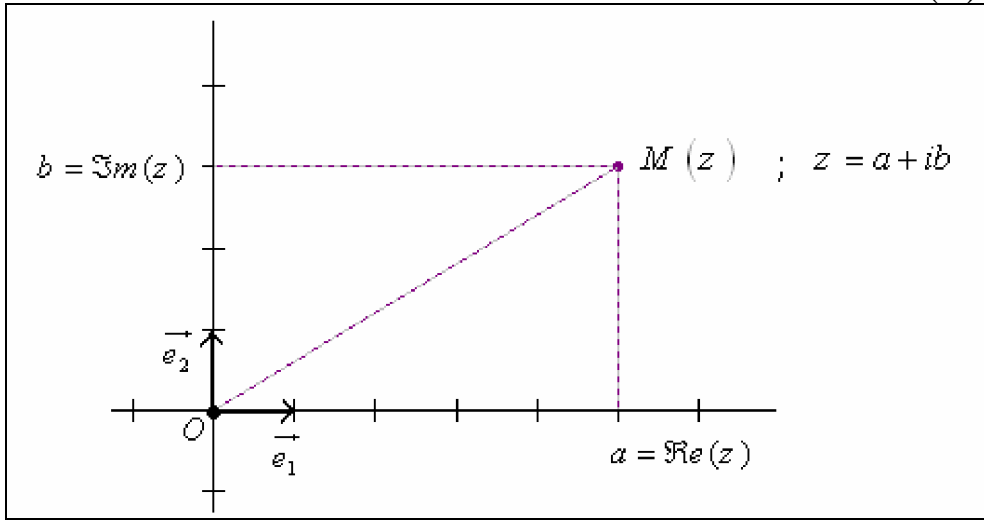
111. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, e_1, e_2) .

1. صورة عدد عقدي - لحق نقطة : Image - Affixe d'un nombre complexe :

(a) لكل عدد عقدي $z = a + ib$ ؛ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ؛ النقطة $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ تسمى **صورة** العدد العقدي z . ونكتب $M(z)$.

(b) لكل نقطة $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ؛ العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى **لحق** النقطة M ونكتب : $z = \text{Aff}(M)$.



مثال :

1. مثل في المعلم (O, e_1, e_2) ؛ النقط التالية :

$$J(i) \quad (e) ; C(2-3i) \quad (c) ; A(2+3i) \quad (a)$$

$$K\left(\frac{4}{1-i}\right) \quad (f) ; I(1) \quad (d) ; B(-1-2i) \quad (b)$$

2. (a) حدد $\text{Aff}(A')$ ؛ لحق النقطة A' ماثلة النقطة A بالنسبة لمحور الأفاسيل .
(b) ماذا تلاحظ ؟

2. مصطلحات :

- i. المستوى (P) يسمى **المستوى العقدي** .
- ii. محور الأفاسيل (O, e_1) يسمى **المحور الحقيقي** .
- iii. محور الأراتيب (O, e_2) يسمى **المحور التخيلي** .
- iv. لكل M و M' من المستوى العقدي (P) ؛ لدينا : $M = M' \Leftrightarrow \text{Aff}(M) = \text{Aff}(M')$.
- v. لكل z و z' من \mathbb{C} ؛ لدينا : $z = z' \Leftrightarrow M(z) = M'(z')$.

3. لحق متجهة - الصورة المتجهة لعدد عقدي :
(a) تعريف :

i. ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. المتجهة $\vec{u} = ae_1 + be_2$ تسمى الصورة

المتجهة للعدد العقدي z و نرمز لها بالرمز $\vec{u}(z)$.

ii. لتكن $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ متجهة من المستوى المتجهي \mathcal{V}_2 . العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى لحق

المتجهة \vec{u} ونرمز له بالرمز $z = \text{Aff}(\vec{u})$.

مثال : 1. مثل المتجهتين $\vec{u}(2-3i)$ و $\vec{v}\left(\frac{-1-5i}{1-i}\right)$.

2. حدد $\text{Aff}(-\vec{u})$ و $\text{Aff}(2\vec{u})$.

ملاحظة :

i. لكل \vec{u} و \vec{v} من \mathcal{V}_2 ، لدينا : $\text{Aff}(\vec{u}) = \text{Aff}(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

ii. لكل z و z' من \mathbb{C} ، لدينا : $z = z' \Leftrightarrow [\vec{u}(z) = \vec{v}(z')]$

(b) خاصيات :

i. لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من \mathcal{V}_2 وليكن α من \mathbb{R} ولتكن A و B نقطتين من (P) . لدينا :

$$\text{Aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{Aff}(\vec{u}) + \text{Aff}(\vec{v})$$

$$\text{Aff}(\alpha \vec{u}) = \alpha \text{Aff}(\vec{u})$$

$$\text{Aff}(-\vec{u}) = -\text{Aff}(\vec{u})$$

$$\text{Aff}(\vec{AB}) = \text{Aff}(B) - \text{Aff}(A) = z_B - z_A$$

ii. لحق منتصف قطعة :

إذا كانت I منتصف قطعة $[AB]$ ؛ فإن : $\text{Aff}(I) = \frac{\text{Aff}(A) + \text{Aff}(B)}{2}$ أي : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

. z_A و z_B و z_I هي على التوالي ألحاق النقط A و B و I .

iii. استقامة ثلاث نقط :

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C ؛ حيث : $z_A \neq z_C$.

لدينا : $[A, B, C \text{ نقط مستقيمة}] \Leftrightarrow \left[\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \mathbb{R} \right]$

تمرين تطبيقي 1 : نعتبر النقط $A(1-i)$ و $B(2+3i)$ و $C(3+i)$ و $A'(-1+3i)$ و $B'(3-i)$ و $C'(4+i)$.

1. بين أن : $AA' + BB' + CC' = \vec{0}$.

2. بين أن للمثلثين ABC و $A'B'C'$ نفس مركز الثقل.

تمرين تطبيقي 2 : تحقق من أن النقط $A(1+2i)$ و $B(-3-6i)$ و $C(\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$ نقط مستقيمة.

تمرين تطبيقي 3 : نعتبر النقط $A(1+i)$ و $B(3+2i)$ و $C(2-i)$ و $D(-2i)$.

أسئلة مستقلة :

1. أ) أنشئ النقط A و B و C و D .

ب) حدد $\text{Aff}(\vec{AB})$.

ج) تحقق من أن $ABCD$ متوازي الأضلاع.

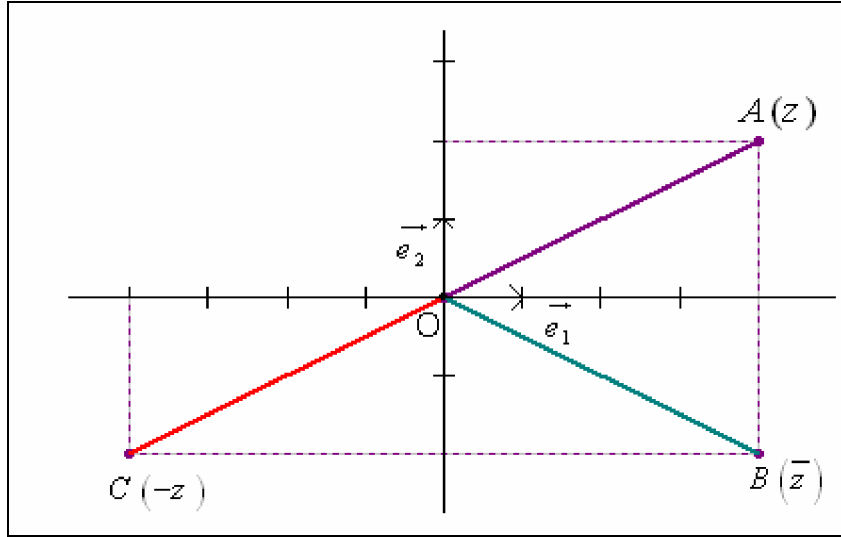
2. أ) أحسب $Aff(AC)$ و $Aff(AB+AD)$.
 ب) استنتج من جديد أن $ABCD$ متوازي الأضلاع .
 3. ليكن I و J على التوالي منتصفتي القطعتين $[AC]$ و $[BD]$.
 أ) حدد $Aff(I)$ و $Aff(J)$.
 ب) تحقق من جديد أن $ABCD$ متوازي الأضلاع .

Conjugué d'un nombre complexe :

IV . مرافق عدد عقدي :

1. تعريف :

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 العدد العقدي $a - ib$ يسمى **مرافق** z ويرمز له بالرمز \bar{z} ونكتب: $\bar{z} = a - ib$



2. مثال : نعتبر النقطة $A(z)$ حيث $z = 3 + 2i$.

1. مثل النقطتين $C(-z)$ و $B(\bar{z})$.

2. أحسب العددين العقديين $z + \bar{z}$ و $z - \bar{z}$.

3. ملاحظات :

i. لكل z من \mathbb{C} ، $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ نقطتان متماثلتان بالنسبة للمحور الحقيقي .

ii. $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{\bar{z}} = z$

iii. $\forall z \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

iv. $\forall z \in \mathbb{C} : z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

v. $\forall z \in \mathbb{C} : \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

vi. $\forall z \in \mathbb{C} : \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

vii. $\forall z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 2\Re(z)$

viii. $\forall z \in \mathbb{C} : z - \bar{z} = 2i\Im(z)$

4. خاصيات :

ليكن z و z' من \mathbb{C} ، وليكن α من \mathbb{R} ، وليكن n من \mathbb{Z} . لدينا :

i. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ و $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ و $\overline{\alpha \cdot z} = \alpha \cdot \bar{z}$ و $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

ii. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ ، $z \neq 0$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ ، $z' \neq 0$

مثال : نضع : $z = \frac{3-7i}{5+i}$ و $z' = \frac{3+7i}{5-i}$

1. بين أن : $z + z' \in \mathbb{R}$ (حساب $z + z'$ غير مطلوب).
2. بين أن : $z - z' \in i\mathbb{R}$ (حساب $z - z'$ غير مطلوب).

تمرين : بين أن : $\forall n \in \mathbb{Z}^* : (1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$ ؛ وأن : $\forall n \in \mathbb{Z}^* : (1+i)^n - (1-i)^n \in i\mathbb{R}$

Module d'un nombre complexe :

V - معيار عدد عقدي :

1. تعريف :

ليكن z من \mathbb{C} . $(z = a+ib \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2)$

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد العقدي z ونرمز له بالرمز $|z|$.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

ملاحظة 1 :

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{z \bar{z}}$$

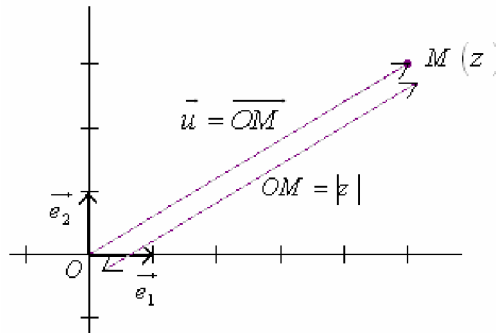
إذا كان $z \in \mathbb{R}$ ، فإن معيار z هو القيمة المطلقة لـ z .

مثال : نعتبر النقطة $A(z)$ بحيث $z = 4+3i$

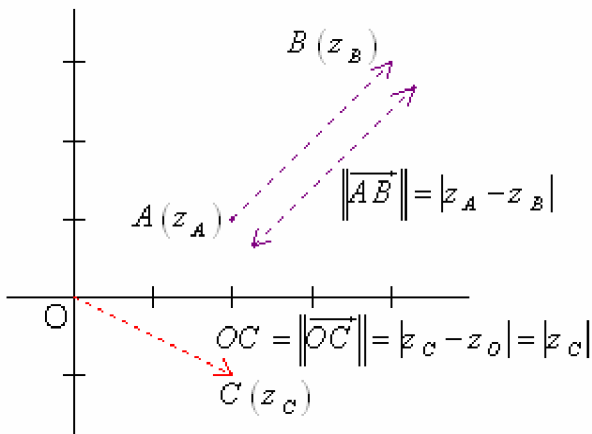
1. مثل النقطة A .
2. أحسب $|z|$.
3. (a) مثل النقطتين $B(\bar{z})$ و $C(-z)$.
- (b) أحسب : $|\bar{z}|$ و $|-z|$.

2. التآويل الهندسي :
(a) خاصية :

ليكن z عددا عقديا صورته M . لدينا : $|z| = \|\vec{OM}\|$



(b) ملاحظة 2 : $\forall z \in \mathbb{C} : |z| = |\bar{z}| = |-z|$



(c) خاصية :

نعتبر نقطتين $A(z_A)$ و $B(z_B)$ من المستوى العقدي (P) .

$$AB = \overline{AB} = |z_B - z_A| \quad \text{لدينا :}$$

3. خاصيات :

$\forall z \in \mathbb{C}^* ; \forall n \in \mathbb{N} : z^n = z ^n$.v	$\forall z \in \mathbb{C} : z = 0 \Leftrightarrow z = 0$.i
$\forall z \in \mathbb{C} : z = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.vi	$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 z_2 = z_1 z_2 $.ii
$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $.vii	$\forall z \in \mathbb{C}^* : \left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$.iii
$\forall z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq z \quad \Im(z) \leq z $.viii	$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : \frac{ z_1 }{ z_2 } = \left \frac{z_1}{z_2} \right $.iv

ملاحظة :

$$\begin{aligned} \cdot \text{ن عموما : } |z_1 + z_2| &\neq |z_1| + |z_2| \\ \cdot \text{ن إذا كان } \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} &= 1 \text{ فإن } AB = AC \end{aligned}$$

4. تطبيقات :

مثال : نعتبر في المستوى العقدي ، النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$ حيث $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 4-i$.

1. حدد هندسيا ثم جبريا : مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - 2 - i| = 4$.
2. مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - 2 - i| = |z - 4 + i|$.

استنتاج :

$$\begin{aligned} \cdot \text{لتكن } A(a) \text{ و } B(b) \text{ نقطتين من المستوى العقدي } (P) \text{ ، وليكن } R \in]0, +\infty[\\ \cdot \text{ن مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث } |z - a| = R \text{ هي الدائرة } C(A, R) \text{ التي مركزها } A \text{ وشعاعها } R. \\ \cdot \text{ن مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث } |z - a| = |z - b| \text{ هي واسط القطعة } [AB]. \end{aligned}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-i, i\} : P(z) = \frac{5z}{z^2 + 1} \quad \text{نضع :}$$

تمرين تطبيقي :

1. حدد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي (P) التي تحقق « $P(z) \in \mathbb{R}$ ».
2. حدد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى العقدي (P) التي تحقق « $P(z) \in i$ ».

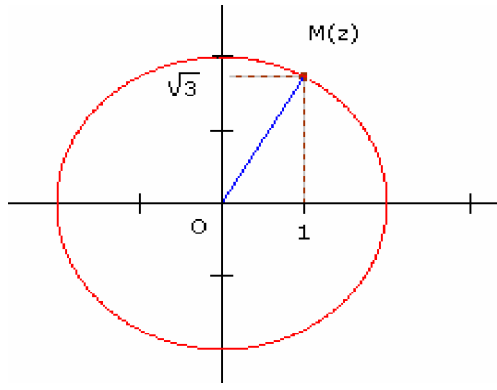
VI- عمدة عدد عقدي غير منعدم : Argument d'un nombre complexe non nul

1. مثال :

- لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي لحقها $z = 1 + i\sqrt{3}$.
- a. أكتب z على الشكل $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ مع $\theta \in]-\pi, \pi]$.
 - b. مثل M في المعلم (O, e_1, e_2) مستعملا r و θ .

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

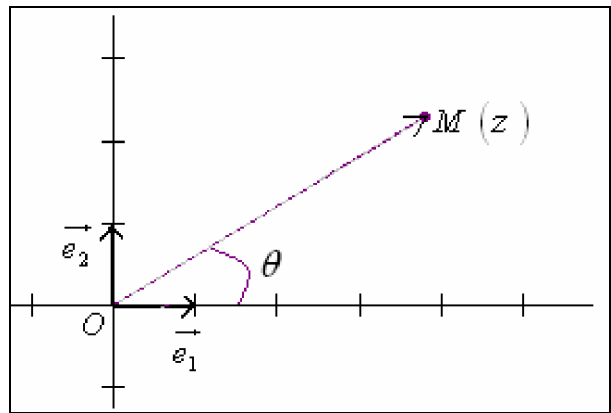
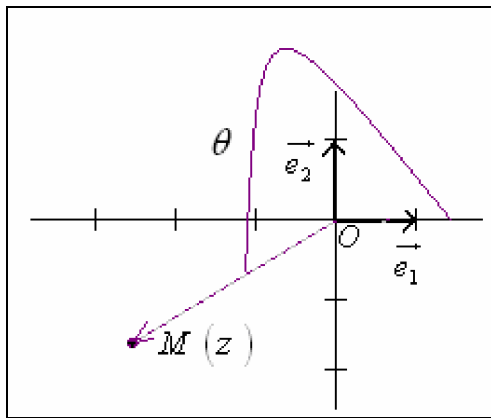
الزوج (r, θ) يسمى زوج الاحداثيتين القطبيتين للنقطة M .



العدد $\frac{\pi}{3}$ يسمى عمدة للعدد العقدي
الغير المنعدم $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2. تعريف :

ليكن z من $\frac{1}{2}^*$ صورته M في المستوى العقدي (P) . نسمي عمدة z كل قياس للزاوية الموجهة (\vec{e}_1, \vec{OM}) ونرمز له بالرمز $\arg(z)$ ونكتب : $k \in \frac{1}{4}$ / $\arg(z) + 2k\pi = (\vec{e}_1, \vec{OM})$ أي : $\arg(z) \equiv [2\pi]$



ملاحظة : في المثال 1 ؛ لدينا : $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

مثال 2 : مثل النقط $A(2)$ و $B(2i)$ و $C(-i)$ و $D(-3)$. ثم استنتج عمدة لكل من ألقاها .

3. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم : **Forme trigonométrique d'un complexe :**
تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ ؛ حيث :
 $r = |z|$ و $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$.
هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي ل z ونكتب : $z = [r, \theta]$

$$z = [r, \theta] \Leftrightarrow z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) / r = |z| ; \theta \equiv \arg(z) [2\pi]$$

مثال : حدد الشكل المثلثي لكل من الأعداد العقدية التالية :

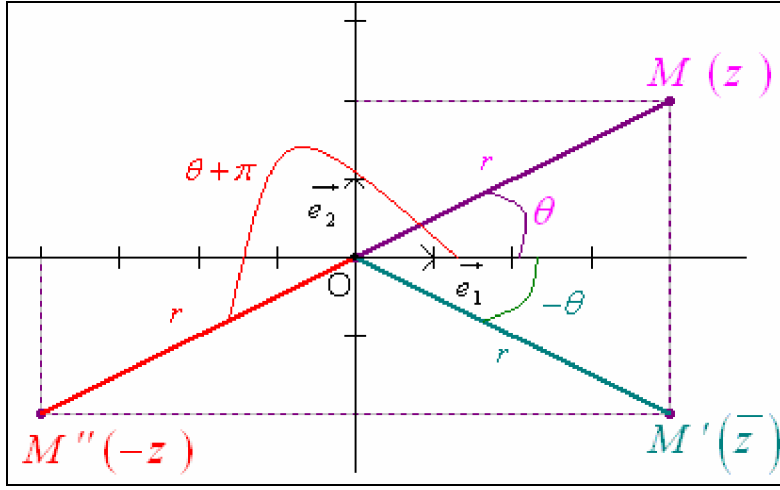
$$z_4 = \frac{1}{i} ; z_3 = \frac{1}{7}i ; z_2 = 2\sqrt{3} + 2i ; z_1 = 4 + 4i$$

ملاحظة : $[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow r = r' \text{ و } \theta \equiv \theta' [2\pi]$

4. الشكل المثلثي ل \bar{z} و $-z$:

ليكن $z = [r, \theta]$ لدينا :

$$\bar{z} = [r, -\theta] \text{ و } -z = [r, \theta + \pi]$$



وبتعبير آخر :

$$\begin{aligned} |-z| &= |z| \quad \text{و} \quad \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \quad [2\pi] \\ |\bar{z}| &= |z| \quad \text{و} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

5. خاصيات :

ليكن z و z' من \mathbb{C} ؛ وليكن $n \in \mathbb{Z}^*$. لدينا :

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$$

الخاصيات السابقة للمعيار والعمدة تكتب كذلك كما يلي :

$$\begin{aligned} (a) \quad [r, \theta] \times [r', \theta'] &= [rr', \theta + \theta'] & (c) \quad \frac{1}{[r, \theta]} &= \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] & (e) \quad \overline{[r, \theta]} &= [r, -\theta] \\ (b) \quad [r, \theta]^n &= [r^n, n\theta] & (d) \quad \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} &= \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right] & (f) \quad -[r, \theta] &= [r, \theta + \pi] \end{aligned}$$

مثال : ليكن $z = 1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ و $z' = 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

i. أعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد العقدية التالية :

$$(1+i\sqrt{3})^6 \quad \text{و} \quad (1+i)(1+i\sqrt{3}) \quad \text{و} \quad \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$$

ii. تحقق من أن : $-4z^8 + z^6 = 0$.

iii. أعط الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية :

$$1-i \quad \text{و} \quad -1-i \quad \text{و} \quad 1-i \quad \text{و} \quad -1+i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad -1-i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad 1-i\sqrt{3}$$

6. زاوية متجهتين وعمدة عدد عقدي :

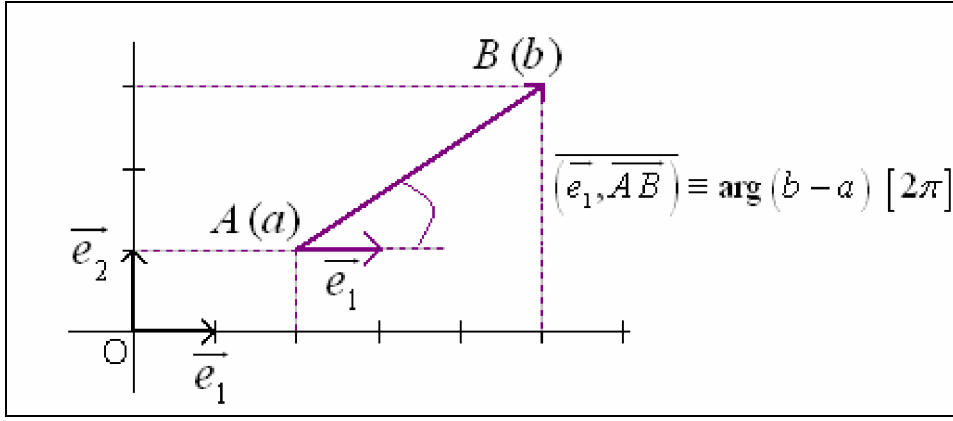
(a) عمدة لحق متجهة :

مثال تمهيدي : لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوى العقدي (P) .

1. أنشئ النقطة C بحيث $OABC$ متوازي الأضلاع .

2. تحقق من أن : $\text{Aff}(C) = b - a$.

3. استنتج أن : $\overrightarrow{(e_1, AB)} \equiv \arg(b - a)$.



خاصية 1 : لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوى العقدي (P) . لدينا : $\overline{(e_1, AB)} \equiv \arg(b-a) [2\pi]$

خاصية 2 :

لتكن $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي (P) . لدينا :

$$\overline{(AB, AC)} \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

برهان : لدينا :

$$\overline{(AB, AC)} \equiv \overline{(AB, e_1)} + \overline{(e_1, AC)} [2\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} \equiv -\overline{(e_1, AB)} + \overline{(e_1, AC)} [2\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} \equiv -\arg(b-a) + \arg(c-a) [2\pi]$$

$$\overline{(AB, AC)} \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

تمرين تطبيقي : نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $S(s)$ التي ألقاها على التوالي :

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad s = i$$

(1) أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{a-s}{b-s}$.

(2) استنتج أن المثلث SAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في S .

(3) بين أن الرباعي $OASB$ مربع .

Formule de Moivre :

-VII صيغة موافر :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{Z} : (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

1. خاصية :

2. مثال : 1. أحسب $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2$ بطريقتين مختلفتين .

2. استنتج صيغ تحويل $\cos(2\theta)$ و $\sin(2\theta)$.

الجواب :

1. لدينا : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i \cos(\theta) \sin(\theta)$

وحسب صيغة موافر ؛ لدينا : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$

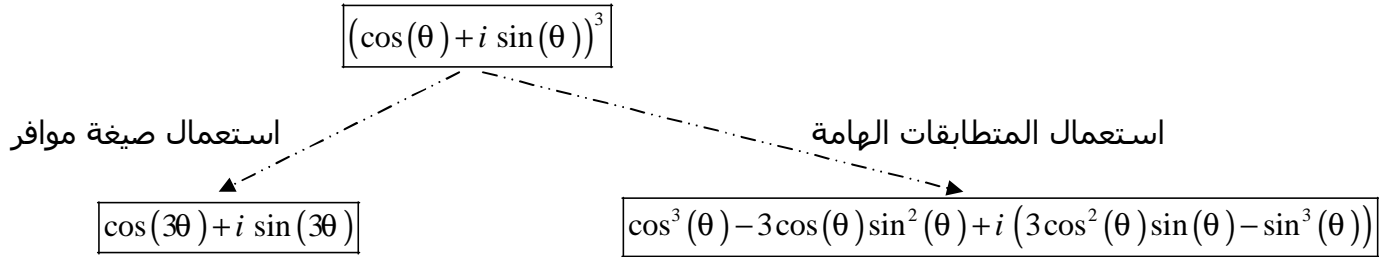
2. حسب خاصية تساوي عددين عقديين؛ لدينا :

$$\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

و

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

مثال : أعط ؛ بنفس الطريقة ؛ صيغ تحويل $\sin(3\theta)$ و $\cos(3\theta)$.



ومنه نستنتج أن : $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ و $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

Notation Exponentielle :

VIII- الترميز الأسّي :

1. تعريف :

ليكن θ عددا حقيقيا. نرمز للعدد العقدي $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$ بالرمز $e^{i\theta}$.

ملاحظة :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \gg e^{i\theta} = [1, \theta] = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

2. مثال : أكتب على الشكل $e^{i\theta}$ مايلي : -1 و $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و i و 1 و $2+2i$.

3. خاصية :

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R} \gg e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

4. الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم :
خاصية :

لكل عدد عقدي غير منعدم z ؛ معياره r و θ عمدة له ؛ لدينا :

$$z = [r, \theta] = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

الكتابة $z = re^{i\theta}$ تسمى الكتابة الأسية للعدد العقدي z .

$$5 + 5i\sqrt{3} = 10 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 10e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثال : لدينا :

5. خاصيات :

نأ إذا كان $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$ ؛ وكان $n \in \mathbb{Z}$ فإن :

$$\overline{z} = re^{-i\theta} , \quad -z = re^{i(\pi+\theta)} , \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} , \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

نأ إذا كان $z = [r, \theta] = re^{i\theta}$ و $z' = [r', \theta'] = r'e^{i\theta'}$ ؛ فإن :

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} , \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

مثال : أعط الكتابة الأسية لكل من الأعداد العقدية التالية : $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$ و $(1+i)(-\sqrt{3}-i)$ و $-j$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \gg : \boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} , \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \quad \text{خاصية :}$$

$$\boxed{\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} \quad \text{و} \quad \boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} \quad \text{تطبيق : بين ؛ باستعمال صيغتا أولير ؛ أن :}$$

$$\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

$$\sin^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{-4} = -\frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}$$

تمرين : أعط ؛ بنفس الطريقة ؛ صيغتي إخطاط $\cos^3(\theta)$ و $\sin^3(\theta)$.
الجواب :

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) = \boxed{\frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}}$$

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = -\frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta) = \boxed{\frac{-\sin(3\theta) + 3\sin(\theta)}{4}}$$

Les racines n ème :

IX- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

1. تعريف :

ليكن u عددا عقديا غير منعدم ؛ وليكن n من \mathbb{Z} ($n \geq 2$) .
كل عدد عقدي z يحقق $z^n = u$ يسمى **جذر نوني** ل u

مثال : لدينا : $i^2 = -1$ و $(-i)^2 = -1$. العددين العقديان i و $-i$ جذران مربعان للعدد العقدي -1 .

لدينا : $(1+i)^2 = 2i$ و $(-1-i)^2 = 2i$.

العددين العقديان $1+i$ و $-1-i$ جذران مربعان للعدد العقدي $2i$.

لدينا : $j^3 = 1$. العدد العقدي j جذر مكعب للعدد العقدي 1 .

2. تحديد الجذور النونية :

أ- مثال تمهيدي : نعتبر المتتالية العددية $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi}{12} \\ \alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{\pi}{3} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

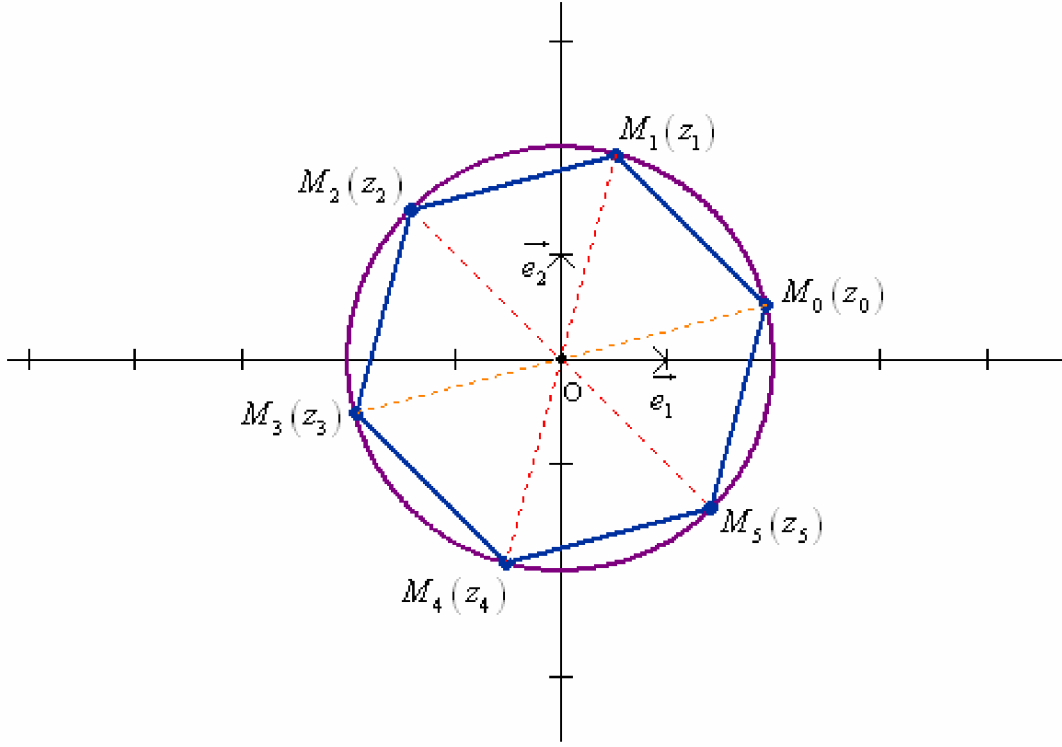
لكل k من \mathbb{Z} ؛ نعتبر النقطة M_k التي لحقها $[2, \alpha_k]$. ليكن : $u = 64e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(1) مثل النقط M_0 و M_1 و M_5 .

(2) (a) ليكن z_k لحق النقطة M_k . بين أن : $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right)}$.

(b) استنتج أن لكل k من \mathbb{Z} ؛ لدينا : $z_k^6 = u$.

الحل : (1) لدينا :



نجد أن $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ هو مسدس منتظم محاط بالدائرة التي مركزها O و شعاعها 2 .

(2) (a) لدينا : $z_1 = [2, \alpha_1] = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right)}$; $z_0 = [2, \alpha_0] = \left[2, \frac{\pi}{12}\right] = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_3 = [2, \alpha_3] = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{3}\right)}$; $z_2 = [2, \alpha_2] = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)}$

$z_5 = [2, \alpha_5] = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right)}$; $z_4 = [2, \alpha_4] = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right] = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)}$

(b) ليكن $k \in \mathbb{Z}$. لدينا : $z_k^6 = \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right)}\right)^6 = 2^6 e^{i6\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right)} = 64e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = u$

الأعداد العقدية z_0 و z_1 و z_2 و z_3 و z_4 و z_5 تسمى الجذور السادسة للعدد العقدي u .

ب- خاصية :

ليكن $n \in \mathbb{Z}^*$. كل عدد عقدي غير منعدم $u = [r, \theta] = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ يقبل n جذرا نونيا . $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$.

حيث : $0 \leq k \leq n-1$

ملاحظة :

الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم u هي حلول المعادلة $z^n = u$.

مثال : الجذور السادسة للعدد العقدي $u = \left[64, \frac{\pi}{2} \right]$ هي :

$$z_k = \left[\sqrt[6]{64}, \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6} \right] = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right] \quad \text{حيث : } 0 \leq k \leq 5$$

$$z_0 = \left[2, \frac{\pi}{12} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{5\pi}{12} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{3\pi}{4} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_3 = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{13\pi}{12} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{13\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{13\pi}{12} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$z_4 = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{17\pi}{12} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$z_5 = \left[2, \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{21\pi}{12} \right] = \left[2, \frac{7\pi}{4} \right] = \left[2, 2\pi - \frac{\pi}{4} \right] = \left[2, -\frac{\pi}{4} \right] = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

3. صور الجذور النونية :
خاصية :

الصور M_0 و M_1 و \dots و M_{n-1} للجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم u هي رؤوس مضلع منتظم ل n ضلعا ومحاطا بالدائرة التي مركزها O وشعاعها $\sqrt[n]{r}$ حيث $r = |u|$. ولدينا :

$$\forall k \in \hat{A}0, n-1 \hat{A} : \| \overline{OM_k} \| = |z_k| = \sqrt[n]{r} \quad \text{و} \quad \forall k \in \hat{A}0, n-1 \hat{A} : \left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right) \equiv \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]$$

برهان : ليكن $u = [r, \theta]$. لدينا : $0 \leq k \leq n-1$ ، $z^n = u \Leftrightarrow z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right]$

ليكن $0 \leq k \leq n-1$ ؛ لدينا : $OM_k = \| \overline{OM_k} \| = |z_k| = \sqrt[n]{r}$. إذن : $M_k \in C(O, \sqrt[n]{r})$

$$\left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_{k+1}}{z_k} \right) \quad [2\pi] \quad \text{ولدينا :}$$

$$\equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \frac{2k\pi}{n} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right) \equiv \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]$$

مثال : الجذور المكعبة للعدد العقدي $u = 8i = \left[8, \frac{\pi}{2} \right]$ هي :

$$z_k = \left[\sqrt[3]{8}, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right] ; \quad 0 \leq k \leq 2$$

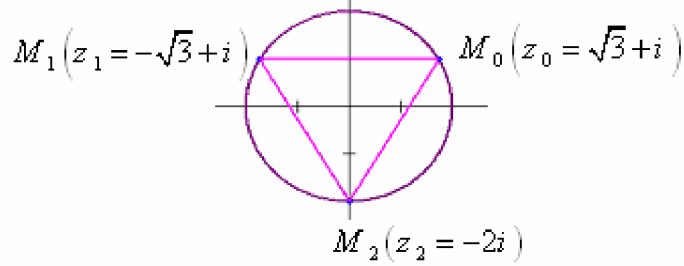
$$z_0 = \left[2, \frac{\pi}{6} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{5\pi}{6} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \boxed{-\sqrt{3} + i}$$

$$z_2 = \left[2, \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right] = \left[2, \frac{3\pi}{2} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) = 2(0 - i) = \boxed{-2i}$$

لدينا $M_0(z_0 = \sqrt{3} + i)$ و $M_1(z_1 = -\sqrt{3} + i)$ و $M_2(z_2 = -2i)$ هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .
ولدينا : $OM_0 = OM_1 = OM_2 = 2$

$$\widehat{(OM_2, OM_3)} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ و } \widehat{(OM_1, OM_2)} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ و } \widehat{(OM_0, OM_1)} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$



4. الجذور النونية للوحدة :

للعدد العقدي 1 ؛ n جذرا نونيا : $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n} \right] = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ حيث : $0 \leq k \leq n-1$
وهي حلول المعادلة : $z^n = 1$.

مثال : $n=2$: الجذرين المربعين للوحدة هما : -1 و 1 .

$n=3$: الجذور المكعبة للوحدة هي : $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{3} \right] = e^{i \frac{2k\pi}{3}}$ حيث : $0 \leq k \leq 2$. أي :

$$z_0 = 1 \text{ و } z_1 = \left[1, \frac{2\pi}{3} \right] = j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } z_2 = \left[1, \frac{4\pi}{3} \right] = j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$n=4$: الجذور الرابعة للوحدة هي: 1 و -1 و i و $-i$.

خاصية :

M_0 و M_1 و \dots و M_{n-1} صور الجذور النونية للوحدة هي رؤوس مضلع منتظم ل n ضلعا ومحاطا بالدائرة المثلثية .

الجذرين المربعين للوحدة	الجذور المكعبة للوحدة	الجذور الرابعة للوحدة

الجذور السابعة للوحدة	الجذور السادسة للوحدة	الجذور الخامسة للوحدة

VIII- المعادلات من الدرجة الثانية في المجموعة $\frac{1}{2}$:

1. الجذرين المربعين لعدد عقدي غير منعدم :

مثال 1: الجذرين المربعين لعدد حقيقي موجب قطعاً x هما : \sqrt{x} و $-\sqrt{x}$.

مثال 2: الجذرين المربعين لعدد حقيقي سالب قطعاً $-x$ هما : $\sqrt{x}i$ و $-\sqrt{x}i$.

مثال 3: الجذرين المربعين للعدد الحقيقي -3 هما : $\sqrt{3}i$ و $-\sqrt{3}i$.

مثال 4: الجذرين المربعين لعدد عقدي تخيلي صرف ib حيث $(b > 0)$ هما :

$$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i) \text{ و } -\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$$

الجزرين المربعين للعدد العقدي $8i$ هما : $\sqrt{\frac{8}{2}}(1+i) = \boxed{2(1+i)}$ و $-\sqrt{\frac{8}{2}}(1+i) = \boxed{-2(1+i)}$

مثال 5 : الجذرين المربعين لعدد عقدي تخيلي صرف ib حيث $(b < 0)$ هما :

$$\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i) \text{ و } -\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$$

الجزرين المربعين للعدد العقدي $-8i$ هما : $\sqrt{\frac{8}{2}}(1-i) = \boxed{2(1-i)}$ و $-\sqrt{\frac{8}{2}}(1-i) = \boxed{-2(1-i)}$

الحالة العامة :

أ- طريقة الشكل المثلثي :

الجزرين المربعين لعدد عقدي غير منعدم $u = [r, \theta]$ هما : $z_k = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} + k\pi \right]$ حيث $0 \leq k \leq 1$.

$$z_1 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} + \pi \right] = -z_0 \text{ و } z_0 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} \right] \text{ أي :}$$

$$\text{مثال : } u = 2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left[4, \frac{\pi}{3} \right] \text{ ليكن}$$

الجزرين المربعين للعدد العقدي u هما :

$$z_k = \left[\sqrt{4}, \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2} \right] = \left[2, \frac{\pi}{6} + k\pi \right] \text{ حيث : } 0 \leq k \leq 1$$

$$z_0 = \left[2, \frac{\pi}{6} \right] = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \boxed{\sqrt{3} + i} \text{ أي :}$$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{6} + \pi \right] = -z_0 = \boxed{-\sqrt{3} + i}$$

و

ب- الطريقة الجبرية :

مثال : حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $u = 8 + 6i$.

الحل : ليكن $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ جذرا مربعا للعدد العقدي u . إذن : $z^2 = u$.

لدينا : $x^2 + y^2 = 10$: إذن : $a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |u| = |8 + 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$$z^2 = u \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 8 + 6i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 + 6i$$

ومنه فإن :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

وبما أن $x^2 + y^2 = 10$ فإن الزوج (x, y) يحقق :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy = 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \boxed{3+i} \vee z = \boxed{-3-i}$$

الحالة العامة : ليكن $u = a + ib$ عددا عقديا حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. وليكن $z = x + iy$ ؛ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ؛ جذرا

مربعا ل u . إذن : $z^2 = u$. ولدينا : $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |u| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

ومنه فإن : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. وعليه فإن :

$$z^2 = u \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$

$$z^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

وبما أن : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ؛ فإن الزوج (x, y) يحقق ما يلي :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ 2xy = b \end{cases}$$

ن إذا كان $b > 0$ فإن $2xy = b$ يستلزم كون x و y من نفس الإشارة . إذن الجذرين المربعين للعدد

$$\cdot z_2 = -z_1 \quad \text{و} \quad z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \quad \text{العقدي } u \text{ هما :}$$

ن إذا كان $b < 0$ فإن $2xy = b$ يستلزم كون x و y لهما إشارتين مختلفتين . إذن الجذرين المربعين للعدد

$$\cdot z_2 = -z_1 \quad \text{و} \quad z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \quad \text{العقدي } u \text{ هما :}$$

خاصية :

كل عدد عقدي غير منعدم له جذران مربعان مختلفان ومتقابلان

مثال : أحسب بطريقتين مختلفتين الجذرين المربعين للعدد العقدي $u = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ ثم استنتج قيمتي

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2. المعادلات من الدرجة الثانية في \mathbb{C} :

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $az^2 + bz + c = 0$: حيث $a \in \mathbb{C}^*$ و $(b, c) \in \mathbb{C}^2$.

$$az^2 + bz + c = a \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad \text{لدينا :}$$

$$\cdot \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{حيث} \quad az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{إذن :}$$

ليكن δ جذرا مربعا للعدد العقدي Δ إذن : $\delta^2 = \Delta$.

$$\cdot az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] = a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \quad \text{ومنه فإن :}$$

$$\cdot \beta = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{إذا كان } \Delta \neq 0 \text{ فإن للمعادلة } (E) \text{ حلين مختلفين هما :}$$

$$\cdot \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{إذا كان } \Delta = 0 \text{ فإن للمعادلة } (E) \text{ حل وحيد}$$

مثال : نعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (\sqrt{3} - i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$ (E)

و z_1 و z_2 حلي (E) بحيث : $\text{Im}(z_2) > 0$.

$$1. \text{ أنشر } (\sqrt{3} - i)^2$$

$$2. \text{ حدد } z_1 \text{ و } z_2$$

$$3. \text{ أ- أكتب } z_1 \text{ و } z_2 \text{ على الشكل المثلثي . ب- أحسب } \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{2005}$$

تمرين تطبيقي 1:

1. نعتبر العدد العقدي u بحيث : $u = 2 - 2\sqrt{3}i$. حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي u .
2. نعتبر المعادلة (E) التالية : $z^2 + (\sqrt{3} + 7i)z - 4(3 - \sqrt{3}i) = 0$.
ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $\Re(z_1) < \Re(z_2)$.
حدد على الشكل الجبري العددين العقديين z_1 و z_2 .
3. المستوى العقدي (\wp) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, e_1, e_2) .
أ. تحقق من أن : $4(z_1 + 2i) = u(z_2 + 2i)$.
ب. نعتبر في المستوى العقدي (P) ؛ النقط : $A(-2i)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$.
حدد قياسا للزاوية الموجهة (\vec{AB}, \vec{AC}) بترديد 2π .
ج. بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .
د. أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{z_2}{z_1}$.
هـ. استنتج الشكل الجبري للعدد العقدي $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^6$.
و. بين أن النقط O و $M_1(z_1^6)$ و $M_2(z_2^6)$ مستقيمية .
ز. حدد (D) ؛ مجموعة النقط $M(z)$ ؛ التي تحقق : $|z - z_1| = |\bar{z} - \bar{z}_2|$.
ح. حدد (D') ؛ مجموعة النقط $M(z)$ ؛ التي تحقق : $|z - z_1| = |iz - iz_2|$.

تمرين تطبيقي 2 :

- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, e_1, e_2) حيث : $\|e_1\| = \|e_2\| = 4cm$.
لتكن B النقطة ذات اللوح i ولتكن M_1 النقطة ذات اللوح $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$.
1. حدد معيار وعمدة للعدد العقدي z_1 .
2. لتكن M_2 النقطة ذات اللوح z_2 حيث M_2 هي صورة النقطة M_1 بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
حدد معيار وعمدة للعدد العقدي z_2 ؛ وبين أن النقطة M_2 تنتمي إلى المستقيم (D) الذي معادلة ديكارتية له هي $y = x$.
3. لتكن M_3 النقطة ذات اللوح z_3 حيث M_3 هي صورة النقطة M_2 بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3} + 2$.
أ- بين أن : $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.
ب- بين أن النقطتين M_3 و M_1 تنتميان إلى الدائرة التي مركزها B وشعاعها $\sqrt{2}$.
4. باستعمال المسطرة و المزاوة ؛ أنشئ النقط M_1 و M_2 و M_3 .
(حدد مراحل الإنشاء معتمدا على الأسئلة السابقة)
5. نربط كل نقطة $M(z)$ ؛ مخالفة للنقطة B ؛ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = \frac{1}{i-z}$.
حدد وأنشئ (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى (P) المحروم من النقطة B ؛ بحيث $M'(z')$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1 .

تمرين تطبيقي 3 :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, e_1, e_2) . لتكن $B(-i)$ نقطة .

$$\text{نضع : } \forall z \in \mathbb{C} - \{-i\} : u = \frac{2z-1}{z+i}$$

حدد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى (P) بحيث : $|u|=2$.

3. مجموع وجداء الجذرين :

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $az^2+bz+c=0$: (E) ، حيث $a \in \mathbb{C}^*$ و $(b,c) \in \mathbb{C}^2$.

ونعتبر α و β جذري المعادلة (E) في \mathbb{C} . لدينا : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$