التمرين 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y''-y'-2y=-10\cos(x)$

1) حل المعادلة : $y''-y'-2y=0$

2) لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$g(x)=3\cos(x)+\sin(x)$$

بين أن الدالة g حل للمعادلة (E) ثم استنتج حلول المعادلة (E).

التمرين 2 :

1) حل المعادلة التفاضلية : $y''-y'-6y=0$.

2) a) حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون الدالة العددية $g:x\mapsto ax+b$ حلا المعادلة :

$(E)\quad y''-y'-6y=-6x-1$.

b) استنتج حلول المعادلة (E) .

c) حدد الحل f للمعادلة (E) الذي يحقق $f(0)=2$ و $f'(0)=2$

التمرين 3 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y''-5y'+6y=e^{2x}$

1) بين أن الدالة : $x\mapsto -x.e^{2x}$ حل خاص للمعادلة (E) .

2) حدد الحل العام للمعادلة (E) .

التمرين 4 :

1) حل المعادلة التفاضلية : $y'+3y=0$.

2) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة $g(x)=ax+b$ حلا للمعادلة التفاضلية :

$(E):\quad y'+3y=6x+5$.

3) حدد الدالة h حل المعادلة (E) الذي يحقق $h(0)=0$.

التمرين 5 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y''+y'-2y=4e^{-x}$.

1) حل المعادلة : $y''+y'-2y=0$.

2) بين أن الدالة : $u:x\mapsto e^{x}-2e^{-x}$ حل خاص للمعادلة (E) .

3) حل المعادلة (E) .

التمرين 6 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y'-y=e^{2x}$.

1) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'-y=0$.

2) تحقق من أن الدالة $x\mapsto e^{2x}$ حل للمعادلة (E) .

3) أعط الحل العام ل (E) .

4) حدد الدالة g ، حل (E) ، بحيث $g(0)=3$. تحقق من أن g تزايدية قطعا على IR .

5) بين أن g تقابل من IR نحو مجال يتم تحديده . حدد الدالة g^{-1} .

التمرين 7 :

نعتبر المعادلة التفاضلية :

$$(E):\quad -y''+2y'+3y=3x^2+x-4$$

1) تحقق من أن الدالة f بحيث $f(x)=x^2-x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

2) حل المعادلة التفاضلية : $-y''+2y'+3y=0$.

3) حدد حل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق :

$y(0)=4$ و $y'(0)=1$.

التمرين 8 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y''-6y'+8y=2x+1$

1) حل المعادلة التفاضلية : $(E_1):\quad y''-6y'+8y=0$

2) أوجد حلا خاصا للمعادلة التفاضلية (E) على الشكل :

$f_1(x)=ax+b$.

3) أوجد حل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق :

$y(0)=\dfrac{21}{16}$ و $y'(0)=\dfrac{17}{4}$.

التمرين 9 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y'+4y=12x^2+14x+6$

1) حل المعادلة التفاضلية : $y'+4y=0$.

2) a) حدد دالة حدودية P من الدرجة الثانية بحيث تكون P حلا للمعادلة (E) .

b) استنتج حلول المعادلة (E) .

التمرين 10 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=e^{2x}-2e^{x}$$

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) حل في IR المعادلة : $f(x)=3$.

3) أ) بين أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية :

$(E):\quad y''-y'-2y=4e^{x}$.

ب) حدد حلول المعادلة (E) .

ج) حدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق :

$g(0)=g\left(\ln(2)\right)=0$.

التمرين 11 :

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\quad y''+9y=2\cos(x)$

1) لتكن y دالة عددية . نعتبر الدالة العددية z المعرفة بما يلي :

$z(x)=y(x)-\dfrac{1}{4}\cos(x)$.

بين أن y حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت z حلا للمعادلة التفاضلية : $y''+9y=0$.

2) أ) حل المعادلة التفاضلية (E) .

ب) حدد حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث :

$y(0)=0$ و $y''(\pi)=0$.

التمرين 12 :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=16\frac{e^{x}-1}{e^{2x}}$$

وليكن (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

b) بين أن : $\forall x\in D:\ f(x)=16\left(e^{x}-e^{-2x}\right)$.

2) a) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

b) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا .

3) a) أحسب $f'(x)$ لكل x من D .

b) أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) a) أحسب $f''(x)$ لكل x من D .

b) أدرس تقعر المنحنى (C) ، وحدد إحداثيتي E نقطة إنعطاف المنحنى (C) .

c) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة E .

d) حدد تقاطع المنحنى (C) ومحور الأراتيب .

5) أنشئ (T) ثم (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(نعطي : $\ln(2)\approx 0,7$)

6) a) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا قطعا . أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المحددين بالمعادلتين $x=0$ و $x=1$.

b) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[\ln(2),+\infty[$.

a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .

b) أنشئ (Γ) منحنى g^{-1} في المعلم السابق .

c) حدد $g^{-1}(2)$.

8) نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E):\ y''+2y'+y=-16e^{-2x}$

a) تحقق من أن الدالة f حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

b) حل المعادلة التفاضلية : $(F):\ y''+2y'+y=0$

Exercice 13 :

Dans une culture de microbes , le nombre de microbes à un instant , exprimé en heures , peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t
La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction .
On a constaté que :

$$y'(t)=k.y(t)$$

Où k est un coefficient réel strictement positif . On désigne par N le nombre de microbes à l'instant t = 0.

1) Déterminer l'unique solution de l'équation Différentielle $y'=k.y$ telle que $y(0)=N$
2) Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé , calculer en fonction de N , le nombre de microbes au bout de trois heures .
3) Quelles est la valeur de N sachant que la culture contient 6 400 microbes au bout de cinq heures ?

Exercice 14 :

On injecte une dose d'une substance médicamenteuse dans le sang à l'instant t = 0 (t exprimé en heures) .
On note Q(t) la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t , exprimée en unités adaptées . Pour les graphiques , le plan P sera rapporté à un repère orthonormé , l'unité graphique étant 2 cm .
À l'instant t = 0 , on injecte par piqûre intraveineuse une dose de 1,8 unité . On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée . On admet que le processus d'élimination peut se présenter mathématiquement par l'équation différentielle :

$$Q'(t)=-\lambda Q(t)$$

Où λ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement .

1) Montrer qu'on a : $Q'(t)=1,8.e^{-\lambda t}$.
   Calculer la valeur de λ , sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 % . On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près .
2) Ètudier le sens de variation de Q pour $t\geq 0$,
   Déterminer sa limite en $+\infty$ et tracer la courbe Représentative (C) de Q dans le plan P .
3) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?
   On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près [On ne demande pas la conversion en heures , minutes et secondes].
4) On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant t = 1 (au bout d'une heure), puis aux instants t = 2 , t = 3,etc .
   On note R_n la quantité de substance présente dans Le sang à l'instant t = n , dès que la nouvelle injection est faite .
   a) Montrer que : $R_1=1,8+0,7\times 1,8$.
   b) Montrer que : $R_2=1,8+0,7R_1$ et calculer R_2 .
   c) Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n .
   d) Montrer que pour tout entier n on a :
   $$R_n=6\left(1-(0,7)^{n+1}\right) .$$
   e) Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini .