الثانية بكالوريا علوم تجريبية	الدوال اللوغاريتمية	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :
أحسب النهايات التالية :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-5\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)^2+\ln x$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-\ln x}{\ln x}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}+\ln x$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln\left(1+x^2\right)$

g) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x$; h) $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x$

i) $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2$; j) $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^3$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$; l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$; n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(1+\ln x)}{x^2-1}$; p) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\tan x)}$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$; r) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

التمرين 2 :
أحسب النهايات التالية :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^3+2x+1}{x^3+5}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln\left(x^2\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{x}\ln\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}+3\ln x$; h) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{Arc\tan(\ln x)+\dfrac{\pi}{2}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$; j) $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan(\ln x)$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}$; l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}$

التمرين 3 :
أحسب النهايات التالية :

a) $\lim\limits_{x\to2^+} \ln\left(x^2-x-2\right)-\ln\left(x^2+5x-14\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(ex^2-x-2\right)-\ln\left(x^2+x+7\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{1-x^2}{\cos x}\right)$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln\left|\sqrt{x}-1\right|}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-2x-\ln x$; g) $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x\ln x$

h) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\dfrac{\ln x}{1-\ln x}+1}{x}$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

التمرين 4 :
نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث :

$$f(x)=-x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات D.
3. أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من D.
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .
4. ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   أ - أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
   ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة : $y=-x$.
   جـ- بين أنه يوجد عدد حقيقي α حيث: $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ و $f(\alpha)=0$.
   - بين أنه يوجد عدد حقيقي β حيث: $-\dfrac{3}{2}<\beta<-1$ و $f(\beta)=0$
   د- أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

(نأخذ : $0,69<\ln(2)<0,70$ و $1,09<\ln(3)<1,10$)

التمرين 5:
نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث :

$$f(x)=x+2\ln\left(\frac{x^2+3}{4x}\right)$$

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.
3. أ- بين أنه لكل x من D ؛ لدينا :
$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+3x+6)}{x(x^2+3)}$$
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .
4. أ- تحقق من أنه لكل x من D ؛ لدينا :
$$f(x)=x+2\ln(x)+2\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)-4\ln(2)$$
   ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
   جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة : $y=x$.
   د- أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

التمرين 6 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. بين أن حيز تعريف f هو : $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
2. بين أن f دالة فردية .
3. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$.
4. تحقق من أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. أ- بين أن : $\forall x\in D \quad : \quad f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.
   ب- حدد جدول تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$.
6. بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها محصور بين $\dfrac{3}{2}$ و 2 .
7. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$. (نأخذ: $\ln(3)\approx1,1$ و $\ln(5)\approx1,6$)

التمرين 7 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=2x-2+\ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$$

1. بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي : $\mathbb{R}^*$.
2. أحسب نهايات f عند محدات $\mathbb{R}^*$.
3. أ- بين أنه لكل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ لدينا : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x^2-x+2)}{x(x^2-2x+2)}$
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .
4. ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
   ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة : $y=2x-2$.
   جـ- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $f(\alpha)=0$ و $\alpha\in\left]-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right[$ ؛ علما أن : $\ln(13)<3$ و $\ln(25)>\dfrac{8}{3}$.
   د- أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$. (تحديد نقطة الإنعطاف غير مطلوب)

التمرين 8 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي :

$$f(x)=\frac{1}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}$$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\|=2cm$

1. أ- بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x(\ln x)^2=0$ (يمكن وضع $x=t^2$) .
   ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أ- بين أن: $\forall x\in]0,+\infty[: \quad f'(x)=\dfrac{-(1+\ln x)^2}{x^2\left[1+(\ln x)^2\right]^2}$
   ب- أحسب : $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$.
   جـ- أعط جدول تغيرات الدالة f .
3. أ- بين أن :
   $$\forall x\in]0,+\infty[: \quad f''(x)=\frac{2(1+\ln x)\left[2+(1+\ln x)^2\right]\ln x}{x^3\left[1+(\ln x)^2\right]^3}$$
   ب- استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطتي انعطاف A و B ينبغي تحديد إحداثيتيهما .
   جـ- حدد معادلتي المماسين للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين A و B .
4. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

التمرين 9 :

I. نعتبر الدالتين المعرفتين على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :
$g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$.

1. أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ثم أدرس منحى تغيرات الدالة g .
   ب- استنتج أن : $g(x)\geq0 \quad : \quad \forall x\in]0,+\infty[$.
2. أ- بين أن :
   $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$
   ب- بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad (x-1)\ln x>0$
3. استنتج أن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad h(x)>0$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

وليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1. أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة مبيانيا .
   ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.
2. أ- بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.
   ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.
3. أ- حدد معادلة ديكارتية للمماس (Δ) لـ $(\mathcal{C})$ في النقطة $A(1,1)$
   ب- تحقق من أن :
   $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$
   جـ- حدد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ والمستقيم (Δ).
4. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ والمستقيم (Δ) في نفس المعلم. (نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1,5)