التمرين 1:

أحسب النهايات التالية :

$\lim_{x\to 0^+} (\ln(x))^2 + \ln(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x)}{\ln(x)}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)}$

و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} x-\ln(1+x^2)$ و $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+\ln(x))}{x^2-1}$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\sin(x))}{\ln(1+\tan(x))}$ و

و $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^n$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{x}$ حيث $n \in IN^*$.

التمرين 2:

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث :

$$f(x) = -x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

1) حدد D حيز تعريف الدالة f .

2) أحسب نهايات f عند محدات D.

3) أ) أحسب $f'(x)$ لكل x من D.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم ذي المعادلة : $y=-x$.

ج) – بين أنه يوجد عدد حقيقي α حيث :

$f(\alpha)=0$ و $\frac{1}{2}<\alpha<1$

- بين أنه يوجد عدد حقيقي β حيث :

$f(\beta)=0$ و $-\frac{3}{2}<\beta<-1$

د) أرسم (C_f) .

5) حدد مساحة السطح المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات ذات المعادلات : $y=-x$ و $x=1$ و $x=2$.

(نأخذ : $0,69<\ln(2)<0,70$ و $1,09<\ln(3)<1,10$)

التمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث :

$$f(x) = x + \frac{3}{x} + 2\ln(|x|)$$

1) أ) حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب) أحسب نهايات f عند محدات D.

2) أ) أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من D.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

3) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة القياس : $1cm$)

أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس تقعر المنحنى (C_f) .

ج) أعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C_f) في النقطة I ذات الأفصول 3 .

د) أرسم المنحنى (C_f) مبرزا نقطه التي أفاصيلها هي 3 و2- و4-

4) أ) أحسب التكامل : $\int_1^3 \ln(x)dx$.

ب) أحسب مساحة جزء المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=1$ و $x=3$ و $y=x$.

(نأخذ : $\ln(2)\approx 0,7$ و $\ln(3)\approx 1,1$)

التمرين 4:

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث :

$$\begin{cases} f(x) = x^3(-1+3\ln(x)) \quad , \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) حدد D حيز تعريف الدالة f .

2) أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أ) أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 على اليمين .

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 .

4) أ) أحسب $f'(x)$ لكل x موجب قطعا .

ب) أدرس إشارة $f'(x)$.

ج) أعط جدول تغيرات الدالة f .

5) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) حدد تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل .

ب) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) .

ج) بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحدد زوج إحداثيتيها .

6) أرسم (C_f) . (نأخذ : $e^{-\frac{1}{2}}\approx 0,6$ و $e^{\frac{1}{3}}\approx 1,4$)

7) ليكن $A(\lambda)$ مساحة السطح المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=1$ و $y=0$ و $x=\lambda$ بحيث: $\lambda\in]0,1[$.

أ) أحسب : $A(\lambda)$ بدلالة λ .

ب) أحسب : $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} A(\lambda)$.

التمرين 5:

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي x حيث :

$$f(x)=x+2\ln\left(\frac{x^2+3}{4x}\right)$$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.

3) أ) بين أنه لكل x من D ، لدينا :

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+3x+6)}{x(x^2+3)}$$

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) تحقق من أنه لكل x من D ، لدينا :

$$f(x)=x+2\ln(x)+2\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)-4\ln(2)$$

ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم ذي المعادلة : $y=x$.

د) أرسم المنحنى (C_f) .

5) أ) أحسب : $\int_1^3 \frac{3-x^2}{3+x^2}dx$

(لاحظ أن : $\frac{3-x^2}{3+x^2}=-1+\frac{2}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$)

ب) باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب مساحة الجزء من المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=1$ و $x=3$ و $y=x$.

التمرين ٦:

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=2x-2+\ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي : IR^* .

2) أحسب نهايات f عند محدات IR^* .

3) أ) بين أنه لكل x من IR^* ، لدينا :

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2-x+2)}{x(x^2-2x+2)}$$

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم ذي المعادلة : $y=2x-2$.

ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $f(\alpha)=0$ و $\alpha\in\left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right[$ ، علما أن : $\ln(13)<3$ و $\ln(25)>\frac{8}{3}$.

د) أرسم المنحنى (C_f) . (تحديد نقطة الإنعطاف غير مطلوب)

5) أ) تحقق من أنه لكل x من IR ، لدينا :

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2}=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-\frac{2}{1+(x-1)^2}$$

ب) أحسب : $\int_1^2 \frac{1}{1+(x-1)^2}dx$ ثم $\int_1^2 \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx$.

ج) أحسب مساحة جزء المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=1$ و $x=2$ و $y=2x-2$.

التمرين ٧:

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1) بين أن حيز تعريف f هو : $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

2) بين أن f دالة فردية .

3) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$.

4) تحقق من أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) أ) بين أن : $\forall x\in D,\ f'(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

ب) حدد جدول تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها محصور بين $\frac{3}{2}$ و 2 .

7) أنشئ المنحنى (C_f) . (نأخذ: $\ln(3)\approx1{,}1$ و $\ln(5)\approx1{,}6$)

8) أ) نعتبر الدالة العددية G المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بمايلي : $G(x)=(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)$.

أحسب $G'(x)$ لكل x من المجال $]1,+\infty[$.

ب) أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=4$ و $x=9$ و $y=\frac{1}{2}x$.

التمرين ٩:

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x)} \quad , \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 .

3) أحسب نهايات الدالة f عند محدات D .

4) أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين .

ب) بين أنه لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ ، لدينا :

$$f'(x)=\frac{x\left(-1+2\ln(x)\right)}{\left(\ln(x)\right)^2}$$

ج) أعط جدول تغيرات الدالة f .

5) ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. أدرس الفروع اللانهائية ل $\left(C_f\right)$.

6) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$. (نأخذ : $\sqrt{e}\approx 1,6$)

التمرين 10: لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{\left(1+\ln(x)\right)^2}{x}$$

و ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) أ) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

ب) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x)\right)^2}{x}=0$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $\left(C_f\right)$.

4) أ) بين أنه لكل x من D ، لدينا :

$$f'(x)=\frac{\left(1+\ln(x)\right)\left(1-\ln(x)\right)}{x^2}$$

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

5) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$. (تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب)

6) أحسب مساحة جزء المستوى المحصور بالمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيمات ذات المعادلات : $y=0$ و $x=\frac{1}{e}$ و $x=e$.

التمرين 11: لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{x}{2}-2\ln\left(\sqrt{x}-1\right)$$

1) أ) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

ب) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

ج) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه لكل x من المجال $]1,+\infty[$ ، لدينا :

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

3) ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_f\right)$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم ذي المعادلة : $y=\frac{x}{2}$.

ج) أرسم المنحنى $y=\frac{x}{2}$. (نقبل أنه ليس للمنحنى $\left(C_f\right)$ أية نقطة انعطاف)

4) أ) أحسب : $\int_1^2\frac{(t+1)^2}{t}dt$.

ب) استنتج قيمة التكامل : $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ (ضع $\sqrt{x}-1=t$ من أجل $x>1$)

ج) أحسب مساحة جزء المستوى المحصور بين المنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيمات ذات المعادلات : $x=4$ و $x=9$ و $y=\frac{x}{2}$.

التمرين 12: لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{1}{x\left(1-\ln(x)\right)}$$

و ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلىمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

2) أحسب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$.

3) أ) بين أن إشارة $f'(x)$ على D هي إشارة $\ln(x)$.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $\left(C_f\right)$.

ب) أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$. (نأخذ : $e\approx 2,7$)

التمرين 13:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & , \quad x>0\\ 1 & , \quad x=0\\ -x+\sqrt{1-x} & , \quad x<0\end{cases}$$

1) بين أن : $\forall x\leq 0,\ln(1+x)-x\geq-\frac{x^2}{2}$.

2) بين أن : $\forall x>0,\ln(1+x)-x\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3) بين أن f متصلة في النقطة 0 .

4) هل f ق.ش.على اليسار في0 ؟ بين أن f ق.ش.على اليمين في 0.

5) حدد إشارة $\varphi(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$ على $]0,+\infty[$.

6) أدرس تغيرات f .

7) أدرس الفروع اللانهائية ل $\left(C_f\right)$ و أنشئ $\left(C_f\right)$. ($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)