

1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2}}}$$

1- بين أن الدالة f متصلة على المجال I .

$$2- \text{بين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

3- ليكن x و y عنصرين من المجال I حيث $x < y$
أ- بين أن :

$$f(x) - f(y) = \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})}{(x + \sqrt[3]{x^2})(y + \sqrt[3]{y^2}) \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt[3]{\frac{xy}{(x + \sqrt[3]{x^2})(y + \sqrt[3]{y^2})}} + \sqrt[3]{\frac{y}{y + \sqrt[3]{y^2}}} \right)}$$

ب- استنتج تغيرات الدالة f على I .

4- أ- بين أن f تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

2

نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \cos(\sin 2x)) & ; x > 0 \\ g(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1- أدرس اتصال الدالة g عند النقطة $x_0 = 0$.

$$2- \text{أ- بين أن } \forall x > 0 \quad 0 \leq \frac{1}{x^2} (1 - \cos(\sin 2x)) \leq \frac{2}{x^2}$$

ب- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

3- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

4- ليكن h قصور الدالة g على المجال $I =]-\infty; 0]$.

أ- بين أن h تقابل من I نحو المجال $J = \left] \frac{1}{2}; 2 \right]$

$$\text{ب- بين أن } \forall x \in J \quad h^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$$

$$\text{ج- بين أن } \exists ! c \in \left] -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right[\quad h(c) = \sqrt{2}$$

$$\text{د- استنتج أن } \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$$