بسم الله الرحمن الرحيم

التمرين الأول :

عيد مبارك سعيد
سنة سعيدة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$$

1. أ- حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

ب- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصلة.

2. أ- تحقق من أن : $f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- بين أن : $f(x)\le x \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ثم أول هندسيا النتيجة.

ب- أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ في المستوى $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4. أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن : $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}} \quad : \quad \forall x\in J$.

جـ- أنشئ في نفس المعلم المنحنى $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

5. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=-\dfrac{3}{4} \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية ثم أن : $u_n\le-\dfrac{3}{4} \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$

وأن : $\sqrt{1+u_n^2}-u_n\ge 2 \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

ب- بين أن : $\left|u_{n+1}\right|\ge 2\left|u_n\right| \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أن : $\left|u_n\right|\ge\dfrac{3}{4}\times 2^n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

جـ- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. هل $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة ؟ علل جوابك.

التمرين الثاني :

1. أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-8+6i$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}(3+i)$.

2. لنعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) حيث :

$$(1-i)z^2-(\cos\theta+i\sin\theta)(3-i)z+2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=0$$

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $]-\pi,\pi[$ و a و b حلي المعادلة (E) حيث $|a|\ge|b|$.

أ- هل يمكن للمعادلة (E) أن تقبل حلا منعدما ؟

ب- حدد $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ (دون اللجوء إلى حساب a و b).

جـ- حدد قيمة العدد العقدي $\dfrac{a}{b}$.

د- حدد بدلالة θ العددين a و b دون اللجوء إلى حل المعادلة (E) . (يمكن استعمال قيمة $a+b$)

3. في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتان لحفاهما على التوالي a و b .

أ- بين أن : $OA=\sqrt{2}OB$ و $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

ب- تحقق من أن المثلث OAB قائم الزاوية في B .

جـ- استنتج طبيعة المثلث OAB .

التمرين الثالث :

المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ حيث $\left\|\vec{e_1}\right\|=\left\|\vec{e_2}\right\|=3cm$. نعتبر النقطة A ذات اللحق i .

نربط كل نقطة $M(z)$ ، مخالفة للنقطة A ، بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$$z'=\frac{z^2}{i-z}$$

1. حدد النقط M التي تنطبق مع صورتها M' .

2. ليكن $z\in\mathbb{C}-\{i\}$.

نضع : $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ مع $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$

بين أن : $x'=\dfrac{-x\left(x^2+y^2-2y\right)}{x^2+(1-y)^2}$

حدد (E) ، مجموعة النقط $M(z)$ ، حيث $M'(z')$ تكون نقطة من المحور التخيلي . أنشئ (E).

3. أوجد علاقة بسيطة تربط المسافات OM و AM و OM' .

استنتج (F) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقطتين M و M' منتميتان إلى دائرة مركزها O. أنشئ (F) .

4. لتكن $M(z)$ نقطة من الدائرة التي مركزها A وشعاعها $\dfrac{1}{2}$ ولتكن $M'(z')$ النقطة المرتبطة بها. نعتبر النقطة G مركز ثقل النقط A و M و M' .

أحسب z_G ، لحق النقطة G ، بدلالة z .

بين أن النقطة G تنتمي إلى دائرة مركزها O محددا شعاعها .

بمقارنة قياسي الزاويتين $\left(\vec{e_1},\overrightarrow{OG}\right)$ و $\left(\vec{e_1},\overrightarrow{AM}\right)$ ، أعط طريقة لإنشاء النقطة G . ثم أنشئ النقطة M' .

B V B