الرياضيات : المادة	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي قطاع التربية الوطنية
3 ساعات : مدة الانجاز	الدورة العادية 2007	
7 : المعامل	شعبة العلوم التجريبية	

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء $\mathscr{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

الفلكة $(S)\ :\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

و المستوى $(\mathscr{P})\ :\ x-y+2z+1=0$

1. بما أن :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2-6z+9-9+8=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\sqrt{6}^2$$

فإن : (S) فلكة مركزها $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها $R=\sqrt{6}$.

2. لدينا : $d\left(\Omega,(\mathscr{P})\right)=\dfrac{\left|1-2+(2\times 3)+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$. إذن $(\mathscr{P})$ مماس للفلكة (S) .

3. أ- لدينا (Δ) هو المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى $(\mathscr{P})$ ولدينا $\vec{n}(1,-1,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathscr{P})$ فهي موجهة للمستقيم (Δ) ، ومنه نستنتج تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) كما يلي :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases} \quad / \quad t\in\mathbb{R}$$

ب- لتكن $\omega(x,y,z)$ نقطة تماس كل من $(\mathscr{P})$ و (S). لدينا : $\omega\in(\mathscr{P})$ و $\omega\in(S)$. إذن :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases} \quad / \quad t\in\mathbb{R}$$ و $x-y+2z+1=0$ ، ومنه فإن :

$$1+t-(2-t)+2(3+2t)+1=0 \Leftrightarrow 6t+6=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t=-1}$$

وعليه فإن : $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$ ، وبالتالي فإن : $\omega(0,3,1)$.

التمرين الثاني :

1. أ- لدينا : $(3-2i)^2=9-12i-4=\boxed{5-12i}$.

ب- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-2(4+i)z+10+20i=0$.

المميز المختصر المعادلة (E) هو :

$$\Delta'=b'^2-ac=\left(-(4+i)\right)^2-1\times(10+20i)=16+8i-1-10-20i=5-12i=(3-2i)^2$$

إذن للمعادلة (E) حلين هما : $z_1=\frac{4+i+3-2i}{1}=7-i$ و $z_2=\frac{4+i-3+2i}{1}=1+3i$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{1+3i \quad , \quad 7-i\}$.

2. في المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1+3i$ و $b=7-i$ و $c=5+9i$.

أ- لدينا : $\frac{c-a}{b-a}=\frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)}=\frac{5+9i-1-3i}{7-i-1-3i}=\frac{4+6i}{6-4i}=\frac{i(6-4i)}{6-4i}=\boxed{i}$.

ب- لدينا : $\frac{c-a}{b-a}=i$. إذن : $\frac{AC}{AB}=\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=|i|=1$ و منه فإن : $\boxed{AB=AC}$.

ولدينا :

$$\begin{aligned}
\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} &\equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]\\
&\equiv \arg(i) \quad [2\pi]\\
\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} &\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

لأن $i=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$. وبالتالي فإن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

التمرين الثالث :

1. ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ، لدينا :

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

2. لدينا : $\int_0^2\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right]_0^2=\boxed{\ln 3}$.

3. نضع : $\begin{cases} u'(x)=x \\ v(x)=\ln(x+1)\end{cases}$. إذن : $\begin{cases} u(x)=\frac{x^2}{2} \\ v'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}=\frac{1}{x+1}\end{cases}$.

لدينا : u و v متصلتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[0,2]$ ولدينا: u' و v' متصلتين على المجال $]0,2[$.

حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا:

$$\int_0^2 x\ln(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{x+1}dx=2\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3=\boxed{\frac{3}{2}\ln 3}$$

التمرين الرابع :

يحتوي كيس على سبع بيدقات (لا يمكن التمييز بينها باللمس) تحمل الأعداد :

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس ، نعتبر الأحداث التالية :

A : « لا توجد أية بيدقة تحمل العدد 0 من بين البيدقات الثلاثة المسحوبة »

B : « سحب ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى »

C : « مجموع الأعداد المسجلة على البيدقات الثلاثة المسحوبة منعدم »

احتمالات الأحداث A و B و C هي :

$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\boxed{\frac{4}{35}}$$

$$p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{C_3^1\times C_1^1\times C_3^1}{C_7^3}=\boxed{\frac{9}{35}}$$

$$p(C)=\frac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\frac{C_3^3+\left(C_3^1\times C_1^1\times C_3^1\right)}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\boxed{\frac{2}{7}}$$

A : $\bar{0}\quad \bar{0}\quad \bar{0}$

B : $1\quad -1\quad 0$

C : $1\quad -1\quad 0$ أو $0\quad 0\quad 0$

مسألة :

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

1. ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $g'(x)=\left(e^{-x}+x-1\right)'=\boxed{-e^{-x}+1}$.

$$\begin{aligned} g'(x)=0 &\Leftrightarrow -e^{-x}+1=0\\ &\Leftrightarrow e^{-x}=1\\ &\Leftrightarrow -x=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\geq 0 &\Rightarrow -x\leq 0\\ &\Rightarrow e^{-x}\leq 1\\ &\Rightarrow -e^{-x}+1\geq 0\\ &\Rightarrow g'(x)\geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x\leq 0 &\Rightarrow -x\geq 0\\ &\Rightarrow e^{-x}\geq 1\\ &\Rightarrow -e^{-x}+1\leq 0\\ &\Rightarrow g'(x)\leq 0 \end{aligned}$$

إذن : g تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

2. لدينا : $g(0)=e^0+0-1=1-1=0$. ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا g تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty,0]$. إذن :

$$\begin{aligned} x\geq 0 &\Rightarrow g(x)\geq g(0)\\ &\Rightarrow g(x)\geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x\leq 0 &\Rightarrow g(x)\geq g(0)\\ &\Rightarrow g(x)\geq 0 \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن : $g(x)\geq 0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$. أي : $e^{-x}+x-1\geq 0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \ : \ e^{-x}+x\geq 1}$

II. لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $x\in\mathscr{D}_f \Leftrightarrow x+e^{-x}\neq 0$ ، وبما أن $e^{-x}+x\geq 1 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ، فإن :

$e^{-x}+x\neq 0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}$. إذن : $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}}$

2. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}=\dfrac{x}{e^{-x}\left(xe^x+1\right)}=\dfrac{xe^x}{xe^x+1}=\dfrac{1}{\dfrac{xe^x+1}{xe^x}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$.

ب- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}=\boxed{0}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}=\boxed{1}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$.

نستنتج مما سبق أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا أفقيا ، بجوار $-\infty$ ، معادلته $\boxed{y=0}$ ؛ ويقبل مقاربا أفقيا ، بجوار $+\infty$ ، معادلته $\boxed{y=1}$.

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x}{x+e^{-x}}\right)' \\
&= \frac{x'\left(x+e^{-x}\right)-x\left(x+e^{-x}\right)'}{\left(x+e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{x+e^{-x}-x\left(1-e^{-x}\right)}{\left(x+e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{x+e^{-x}-x+xe^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^2} \\
f'(x) &= \boxed{\frac{(x+1)e^{-x}}{\left(x+e^{-x}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

ب- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $(x+1)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ كما يلي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{1-e}$	$\nearrow$	1

$$f(-1)=\frac{-1}{-1+e}=\frac{1}{1-e}$$

4. أ- معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

أي : $\boxed{(\Delta)\ :\ y=x}$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $g(x)=e^{-x}+x-1$ ، إذن : $g(x)+1=e^{-x}+x$ ، ومنه فإن :

$$x-f(x)=x-\frac{x}{x+e^{-x}}=x\left(1-\frac{1}{x+e^{-x}}\right)=\frac{x\left(x+e^{-x}-1\right)}{x+e^{-x}}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

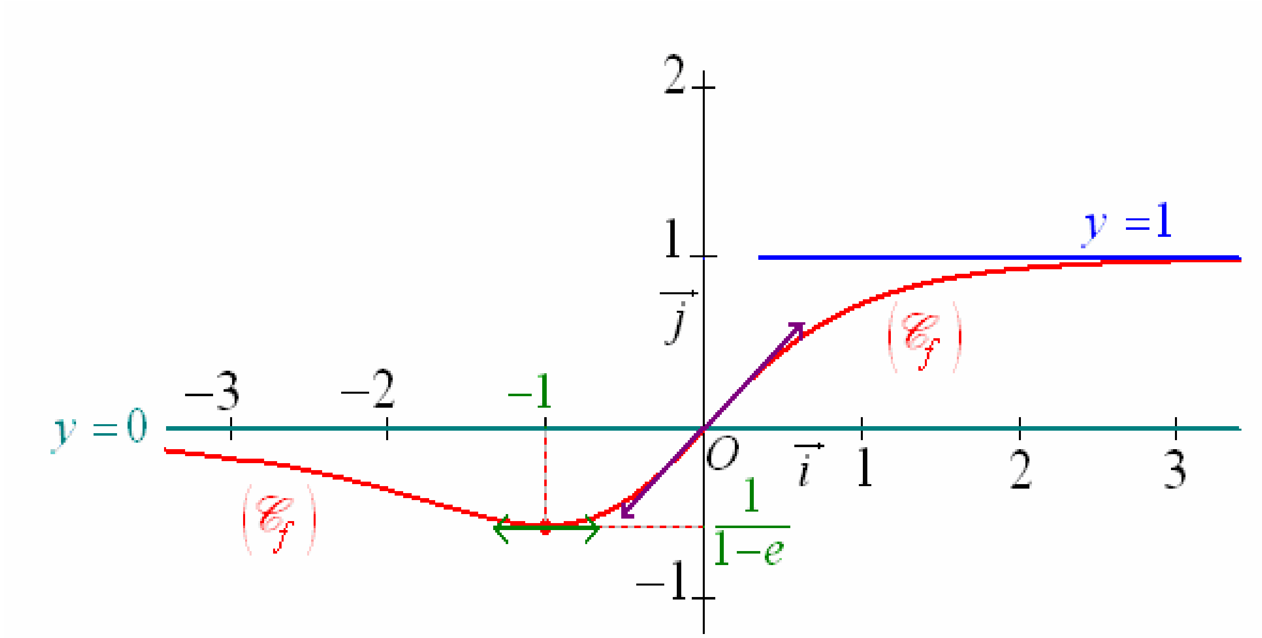
إذن : إشارة $f(x)-x$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة x .

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$	
$x-f(x)$	$-$ $\quad$ 0	$+$

جـ- حسب السؤال السابق ، لدينا :

- ✓ $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0,+\infty[$.
- ✓ $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty,0]$.

5. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$:



III. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ ، إذن : $0\le u_0\le 1$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، نفترض أن $0\le u_n\le 1$ ونبين أن $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا $0\le u_n\le 1$ و f تزايدية على المجال $[0,1]$ ، إذن $f(0)\le f(u_n)\le f(1)$ وبما أن $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0,1]$ ، فإن $0\le u_{n+1}\le f(1)\le 1$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 0\le u_n\le 1}$

2. حسب السؤال II.4.ب ، لدينا : $\forall x\in[0,1] \ : \ x-f(x)\ge 0$. إذن : $\forall x\in[0,1] \ : \ f(x)\le x$.

وبما أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 0\le u_n\le 1$ ، فإن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ f(u_n)\le u_n$ ،

ومنه فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \ : \ u_{n+1}\le u_n}$

وبالتالي فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة . لتكن l نهايتها.

لدينا :

✓ f دالة متصلة على المجال $\left[0,1\right]$.

✓ $0\le f\left(x\right)\le x\le 1 \; : \; \forall x\in\left[0,1\right]$. إذن : $f\left(\left[0,1\right]\right)\subset\left[0,1\right]$.

✓ $\forall n\in\mathbb{N} \; : \; u_n\in\left[0,1\right]$.

✓ $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نهايتها l .

إذن : $f\left(l\right)=l$ و $l\in\left[0,1\right]$.

حسب السؤال II.4.ب ، لدينا : $\begin{cases} x-f\left(x\right)>0 \iff x>0 \\ x-f\left(x\right)<0 \iff x<0 \\ x-f\left(x\right)=0 \iff x=0 \end{cases}$. إذن : $l=0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=0}$.